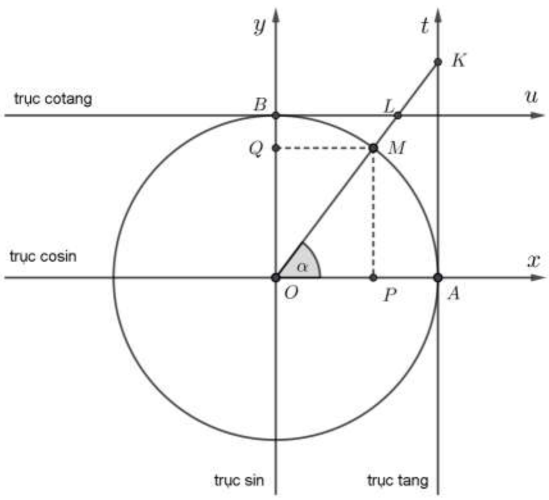
Chương 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§0. ÔN TẬP CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1. Đường tròn lượng giác

Đường tròn lượng giác là đường tròn định hướng có tâm O, bán kính bằng 1 trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

Với mỗi số thực α, tồn tại duy nhất một điểm M thuộc đường tròn lượng giác sao cho $(Ox, OM) = \alpha$.



Ta có:

$\sin\alpha = \overline{OQ}$, trục Oy là trục sin;

$\cos\alpha = \overline{OP}$, trục Ox là trục cos;

$\tan\alpha = \dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \overline{OK}$, trục At là trục tang;

$\cot\alpha = \dfrac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \overline{BL}$, trục Bu là trục cotang.

2. Giá trị lượng giác của các cung góc đặc biệt

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\Vert$	$-\sqrt{3}$	-1	0	$\Vert$	0
$\cot\alpha$	$\Vert$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$\Vert$	0	$\Vert$

3. Các hệ thức lượng giác cơ bản và các hệ quả

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
- $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$
- $\dfrac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$
- $\dfrac{1}{\sin^2 x} = \cot^2 x + 1$
- $\tan x.\cot x = 1$

4. Các cung liên kết (*cos đối – sin bù – phụ chéo – hơn kém π tan*)

Cung đối nhau (tổng bằng 0)	Cung bù nhau (tổng bằng π)
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$	$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$ $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$ $\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$ $\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$
Cung phụ nhau (tổng bằng $\frac{\pi}{2}$)	**Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$ (hiệu bằng $\frac{\pi}{2}$)**
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha$
Cung hơn kém π (hiệu bằng π)	**Trường hợp đặc biệt**
$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$ $\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$ $\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$	$\sin(\alpha+k2\pi) = \sin\alpha$ $\cos(\alpha+k2\pi) = \cos\alpha$ $\tan(\alpha+k\pi) = \tan\alpha$ $\cot(\alpha+k\pi) = \cot\alpha$

5. Công thức cộng

- $\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \cos a\sin b$
- $\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b$
- $\tan(a \pm b) = \dfrac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a\tan b}$

6. Công thức nhân đôi

- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$
  $= 2\cos^2 a - 1$
  $= 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin 2a = 2\sin a\cos a$
- $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

7. Công thức hạ bậc

- $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$
- $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$

8. Công thức nhân ba

- $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$
- $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

9. Công thức biểu diễn $\sin a, \cos a, \tan a$ **theo** $t = \tan\frac{a}{2}$ $\left(a \neq \pi + k2\pi\right)$

- $\sin a = \dfrac{2t}{1+t^2}$
- $\cos a = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
- $\tan a = \dfrac{2t}{1-t^2}$

10. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

11. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$$

$$\sin a.\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b) + \sin(a+b)\right]$$

12. Các công thức quan trọng thường dùng

- $\sin^4 a + \cos^4 a = 1 - 2\sin^2 a.\cos^2 a$
- $\sin^6 a + \cos^6 a = 1 - 3\sin^2 a\cos^2 a$
- $\sin a + \cos a = \sqrt{2}.\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.\cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$
- $\sin a - \cos a = \sqrt{2}\sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$

§1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

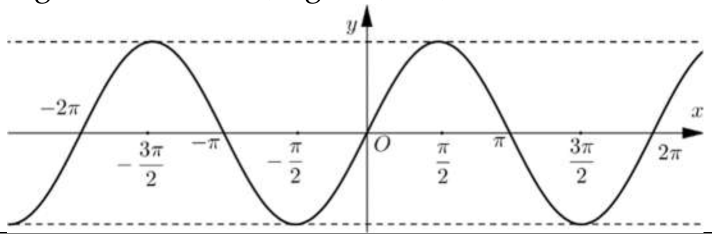
1. Hàm số $y = \sin x$

Định nghĩa: Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\sin x$ được gọi là hàm số sin, kí hiệu: $y = \sin x$.

Tính chất: Hàm số $y = \sin x$:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Tập giá trị: $T = \left[-1;1\right]$.
- Là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kỳ 2π.
- Hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$;

  nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$.
- Đồ thị là đường hình sin và nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.



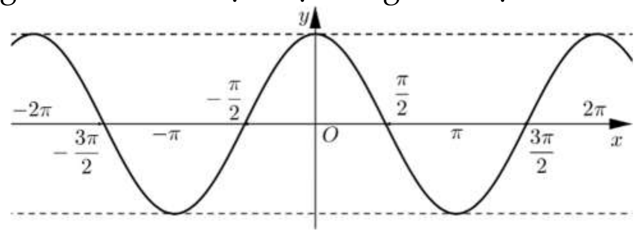
2. Hàm số $y = \cos x$

Định nghĩa: Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\cos x$ được gọi là hàm số cosin, kí hiệu: $y = \cos x$.

Tính chất: Hàm số $y = \cos x$:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Tập giá trị: $T = [-1;1]$.
- Là hàm số chẵn, tuần hoàn với chu kỳ 2π.
- Hàm số đồng biến trên $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$;

  nghịch biến trên $(k2\pi; \pi + k2\pi)$.
- Đồ thị là đường hình sin và nhận trục tung làm trục đối xứng.

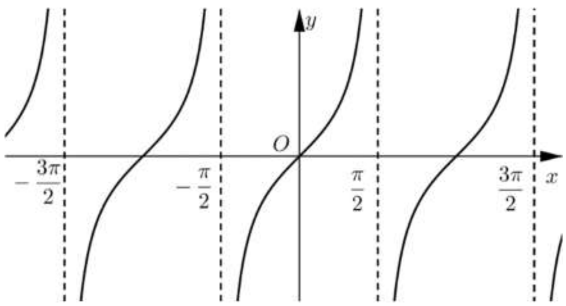


3. Hàm số $y = \tan x$

Định nghĩa: Hàm số được xác định bởi công thức $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $(\cos x \neq 0)$ là hàm số tang, kí hiệu: $y = \tan x$.

Tính chất: Hàm số $y = \tan x$:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$.
- Là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kỳ π.
- Hàm số đồng biến trên $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi \right)$.
- Đồ thị nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng và nhận mỗi đường $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ làm tiệm cận.



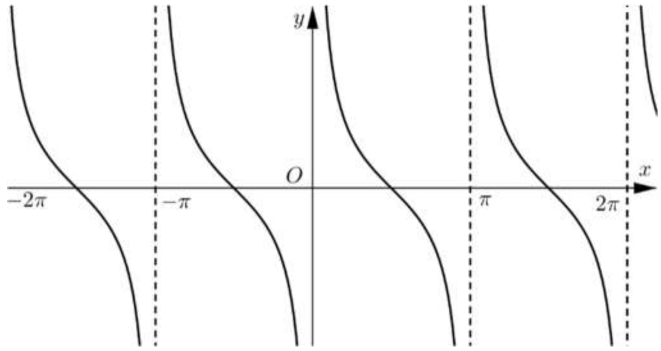
4. Hàm số $y = \cot x$

Định nghĩa: Hàm số được xác định bởi công thức $y = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ $(\sin x \neq 0)$ là hàm số cotang, kí hiệu: $y = \cot x$.

Tính chất: Hàm số $y = \cot x$:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$.
- Là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kỳ π.

- Hàm số nghịch biến trên $(k\pi;\pi+k\pi)$.
- Đồ thị nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng và nhận mỗi đường $x=k\pi$ làm tiệm cận.



Lưu ý:

- Các hàm số $y=m.\sin(ax+b)+n$ và $y=m\cos(ax+b)+n$ có chu kỳ $T_0=\dfrac{2\pi}{|a|}$.
- Các hàm số $y=m.\tan(ax+b)+n$ và $y=m\cot(ax+b)+n$ có chu kỳ $T_0=\dfrac{\pi}{|a|}$.

Chú ý: Với $k\in\mathbb{Z}$ ta có:

$\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi$	$\sin x\neq \pm1\Leftrightarrow x\neq\pm\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$	
$\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$	$\cos x\neq 1\Leftrightarrow x\neq k2\pi$	$\cos x\neq -1\Leftrightarrow x\neq \pi+k2\pi$
$\tan x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi$	$\cot x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$	
$\tan x$ có điều kiện $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$	$\cot x$ có điều kiện $x\neq k\pi$	

Vấn đề 1: Tìm tập xác định của hàm số lượng giác

Nắm vững tập xác định của các hàm số $\sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ \cot x$.

Chú ý:

$\sqrt{f(x)}$ xác định khi $f(x)$ xác định và $f(x)\geq 0$.

$\dfrac{1}{f(x)}$ xác định khi $f(x)$ xác định và $f(x)\neq 0$.

Bài tập

Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\tan 2x$

b) $y=\cot(3x-2)$

c) $y=\tan 3x-2\cot 2x$

f) $y=\dfrac{\cot x}{\cos x+1}$

d) $y = \dfrac{1}{\sin 2x - 1}$

e) $y = \dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{1}{\sin x}$

g) $y = \dfrac{2016\cos x}{\tan x + 1}$

h) $y = \dfrac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}$

i) $y = \sqrt{\sin^2 2x - 2\sin 2x + 3}$

Vấn đề 2: Xét tính chẵn, lẻ của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ $(\forall x \in D)$.

- f là hàm số chẵn $\Leftrightarrow$ với mọi $x \in D$, ta có $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.
- f là hàm số lẻ $\Leftrightarrow$ với mọi $x \in D$, ta có $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

Bài tập

Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = x - \sin x$

b) $y = 3\sin x - 2$

c) $y = \sin x - \cos x$

d) $y = \sin x.\cos x + \tan x$

e) $y = \dfrac{\cos x}{x}$

f) $y = \tan^3 x - x$

g) $y = \sqrt{1 - \cos x}$

h) $y = \sin|x| + 1$

i) $y = \sin(2x) + x^3$

j) $y = \dfrac{\sin x}{x^4 - 3x^2 + 2}$

Vấn đề 3: Chứng minh $f(x)$ là hàm số tuần hoàn có chu kỳ T

Tìm tập xác định D: $x \in D \Rightarrow \begin{cases} x - T \in D \\ x + T \in D \end{cases}$.

Chứng minh $f(x+T) = f(x);\ \forall x \in D$.

Giả sử có số T': $0 < T' < T$ và T' thỏa:

$\begin{cases} x \pm T' \in D \\ f(x+T') = f(x),\ \forall x \in D \end{cases} \Rightarrow$ vô lý

Vậy $f(x)$ là hàm số tuần hoàn theo chu kỳ T.

Bài tập

Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ của các hàm số sau:

a) $y = \sin 2x$

b) $y = x + \sin x$

c) $y = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Vấn đề 4: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm lượng giác

Dùng các tính chất:

- $-1 \le \sin x \le 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$
- $-1 \le \cos x \le 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$
- $0 \le \sin^2 x \le 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$
- $0 \le \cos^2 x \le 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Bài tập

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = 3 - 2\sin(2x)$

b) $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

c) $y = \cos^2 x - 2\cos x - 4$

d) $y = 5 + 4\sin x + \sin^2 x$

e) $y = \sqrt{5 - 4\sin x + \sin^2 x}$

f) $y = (\cos x - \sin x - 2\sqrt{2})^2 - 1$

g) $y = 2\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 4\cos^2 x + 1$

h) $y = \cos(x + \pi) - 2$

i) $y = \dfrac{\cos x + 2\sin x - 3}{2\cos x - \sin x + 4}$

j) $y = \sqrt{\cos^2 x + 6\cos x + 14}$

k) $y = \dfrac{3\sin x + 8}{\sin x + 2}$

l) $y = \cos x$ trên đoạn $\left[\dfrac{-\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right]$

m) $y = \dfrac{3\cos^2 x + 8}{\cos^2 x + 2}$

n) $y = |\sin x| + |\cos x|$

§2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1. Phương trình $\sin x = m$ (1) **(m là hằng số)**

- $|m| > 1$ thì (1) vô nghiệm vì $|\sin x| \le 1$ với mọi x.
- $|m| \le 1$ thì nếu α là một giá trị đúng sao cho $m = \sin\alpha$.

Khi đó, $(1) \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - a + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$

Nếu không tìm được giá trị đúng α thì:

$\sin x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin m + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$ $\left(\arcsin m \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$

Tổng quát: $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$

(với u, v là các biểu thức chứa x)

Một số trường hợp đặc biệt:

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

2. Phương trình $\cos x = m$ (2) **(m là hằng số)**

- $|m| > 1$ thì (2) vô nghiệm vì $|\cos x| \le 1$ với mọi x.
- $|m| \le 1$ thì nếu α là một giá trị đúng sao cho $m = \cos\alpha$.

Khi đó, $(2) \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -a + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$

Nếu không tìm được giá trị đúng α thì:

$\cos x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arccos m + k2\pi \\ x = -\arccos m + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$ $\left(\arccos m \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$

Tổng quát: $\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = \pm v + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ (với u, v là các biểu thức chứa x)

Một số trường hợp đặc biệt:

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

3. Phương trình $\tan x = m$ (3) **(m là hằng số)**

Phương trình luôn có nghiệm $\forall m$.
Nếu α là một giá trị đúng sao cho $m = \tan\alpha$.

Khi đó, $(3) \Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ $\left(\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

Nếu không tìm được giá trị đúng α thì:

$\tan x = m \Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ $\left(\arctan m \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

Tổng quát: $\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ (với u, v là các biểu thức chứa x)

Một số trường hợp đặc biệt:

- $\tan x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
- $\tan x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

4. Phương trình $\cot x = m$ (4) **(m là hằng số)**

Phương trình luôn có nghiệm $\forall m$.
Nếu α là một giá trị đúng sao cho $m = \cot\alpha$.

Khi đó, $(4) \Leftrightarrow \cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ $\left(\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

Nếu không tìm được giá trị đúng α thì:

$\cot x = m \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} m + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ $(\operatorname{arccot} m \in (0; \pi))$

Tổng quát: $\cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ (với u, v là các biểu thức chứa x)

Một số trường hợp đặc biệt:

- $\cot x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

- $\cot x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

Bài tập

Bài 1. Giải các phương trình sau

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\tan\left(3x - 30^0\right) = -1$

d) $\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

e) $\sin x = \frac{1}{4}$

f) $\cos(x+3) = \frac{1}{3}$

g) $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

h) $\cos 3x - \sin 2x = 0$

i) $\tan x.\tan 2x = -1$

Bài 2. Giải các phương trình sau

a) $2\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

b) $2\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0$

c) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

d) $\cos\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

Bài 3. Giải các phương trình sau

a) $2\sin\left(-3x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0$

b) $2\sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} = 0$

c) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)$

d) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

Bài 4. Giải các phương trình sau

a) $3\tan\left(-3x + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3} = 0$

b) $\tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0$

c) $3\cot\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0$

d) $3\cot\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0$

e) $\tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - \tan x = 0$

f) $\cot\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) - \cot\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$

Bài 5. Giải các phương trình sau

a) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

b) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

c) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

d) $\cos\left(-5x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

e) $\cos\left(-3x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

f) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

g) $\tan\left(-3x - \frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

h) $\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \cot\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

Bài 6. Giải các phương trình sau

a) $\sin^2 3x - \sin^2 x = 0$

b) $\sin^3 3x - \sin^3 x = 0$

c) $\sin^4 2x - \cos^4 2x = 0$

d) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8}$

e) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$

f) $\sin 7x.\cos x = \sin 5x.\cos 3x$

g) $\cos 5x.\cos x = \cos 4x.\cos 2x$

h) $\sin 7x.\sin 3x = \sin^2 5x$

Bài 7. Định m để các phương trình sau có nghiệm

a) $-3\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + m^2 - 1 = 0$

b) $(2m+5)\cos x - 3 = m - \cos x$

Bài 8. Định m để các phương trình sau vô nghiệm

a) $2\sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) + m^2 - 4 = 0$

b) $m\sin x + 1 = 2(\sin x + m)$

§3. MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1. Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác

Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác là phương trình có một trong những dạng sau:

$a\sin x + b = 0$; $a\tan x + b = 0$

$a\cos x + b = 0$; $a\cot x + b = 0$

Trong đó: a, b là những hằng số $(a \neq 0)$.

Phương pháp giải:

Chuyển vế và chia hai vế của phương trình cho a, ta đưa phương trình về phương trình lượng giác cơ bản.

2. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác là phương trình có một trong những dạng sau:

$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$; $a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$

$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$; $a\cot^2 x + b\cot x + c = 0$

Trong đó: a, b, c là những hằng số $(a \neq 0)$.

Phương pháp giải:

Đặt biểu thức lượng giác làm ẩn phụ và đặt điều kiện cho ẩn phụ (nếu ẩn phụ là hàm tan hoặc cot) rồi giải phương trình bậc hai theo ẩn phụ này. Cuối cùng ta đưa về việc giải các phương trình lượng giác cơ bản.

Bài tập

Bài 1. Giải các phương trình sau

a) $2\sin\left(-3x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}=0$

b) $2\sin\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}=0$

c) $2\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=1$

d) $2\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}=0$

Bài 2. Giải các phương trình sau

a) $3\tan\left(-3x+\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}=0$

b) $\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}=0$

c) $3\cot\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}=0$

d) $3\cot\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=0$

e) $\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)-\tan x=0$

f) $\cot\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)-\cot\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=0$

Bài 3. Giải các phương trình sau

a) $2\sin^2 x+3\sin x-2=0$

b) $3\cot^2 x+3\cot x-2=0$

c) $3\cos^2 x-5\cos x+2=0$

d) $3\tan^2 x-2\sqrt{3}\tan x+1=0$

e) $\tan^3 x-3\tan^2 x-2\tan x+4=0$

f) $4\sin^3 x+4\sin^2 x-3\sin x=3$

Bài 4. Giải các phương trình sau

1) $2\cos^2 x-5\cos x+2=0$

2) $2\sin^2 x+5\sin x+2=0$

3) $2\cos^2 4x+5\cos 4x+3=0$

4) $4\cos^2 x-2(\sqrt{3}-1)\cos x-\sqrt{3}=0$

5) $\tan^2 2x-(\sqrt{3}+1)\tan 2x+\sqrt{3}=0$

6) $\cot^2 2x-(2+\sqrt{2})\cot 2x+1+\sqrt{2}=0$

7) $2\cos 2x-7\sin x=0$

8) $\cos 4x+6=7\cos 2x$

9) $12\cos^2 x+\sin x-1=0$

10) $2\sin^2 2x-10\sin x\cos x+3=0$

11) $5\cos x+15\cos\frac{x}{2}+10=0$

12) $\sin^2 2x+\cos^2 x-\frac{1}{2}=0$

13) $\cos 4x+12\sin x\cos x-5=0$

14) $2\cos^4 x-5\sin^2 x-2=0$

15) $\frac{1}{\cos^2 x}+\tan x-3=0$

16) $\frac{3}{\sin^2 x}-2\sqrt{3}\cot x-6=0$

17) $\tan^3 2x-3\tan 2x=4-\frac{1}{\cos^2 2x}$

18) $\tan x+2\cot x-3=0$

19) $(\sin x+\cos x)^2+\cos 4x-1=0$

20) $\cos 8x+\sin^3 x\cos x-\cos^3 x\sin x-1=0$

21) $\cos^4 x+\sin^6 x=\cos 2x$

22) $\cos 5x\cos x=\cos 4x\cos 2x+3\cos^2 x+1$

23) $\cos^4 x+\sin^4 x-\sin 2x+\frac{3}{4}\sin^2 2x=0$

24) $\cos^6 2x+\sin^6 2x=\frac{15}{8}\cos 4x-\frac{1}{2}$

25) $\frac{3}{\cos x}+\tan^2 x-9=0$

26) $4\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)+4\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)-7=0$

27) $\tan^2 x+\cot^2 x+2(\tan x+\cot x)=6$

28) $(1+\sin 2x)(1-\tan x)=1+\tan x$

Bài 5. Giải các phương trình sau

a) $\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+3\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1=0$

b) $2\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-6\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2=0$

c) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+5\cos\left(\frac{7\pi}{6}-x\right)+3=0$

d) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)-2=0$

3. Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$

$$a\sin x+b\cos x=c \qquad \left(a^2+b^2\neq 0\right) \qquad (1)$$

Phương pháp giải:

Chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{a^2+b^2}$, ta được:

$(1)\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin u+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos u=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Vì $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$ nên tồn tại góc $\alpha\in[0;2\pi]$ sao cho

$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ và $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Khi đó, phương trình (1) có dạng:

$\sin x.\cos\alpha+\cos x\sin\alpha=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Leftrightarrow \sin(x+\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (phương trình cơ bản)

Điều kiện có nghiệm của phương trình (1): $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1\Leftrightarrow a^2+b^2\ge c^2$.

Bài tập

Bài 1. Giải các phương trình sau

a) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$

b) $\cos x-\sqrt{3}\sin x=\sqrt{2}$

c) $3\sin 3x-4\cos 3x=5$

d) $2\sin x+2\cos x-\sqrt{2}=0$

e) $\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\cos 3x$

f) $\sin 9x+\sqrt{3}\cos 7x=\sin 7x+\sqrt{3}\cos 9x$

Bài 2. Giải các phương trình sau

a) $\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x+2=0$

e) $5\sin x+12\cos x=12$

f) $3\sin x-5\cos x=-3$

b) $\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x=\sqrt{3}$

c) $\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x+1=0$

d) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=\sqrt{2}$

g) $-\sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{6}\sin 2x=2$

h) $-3\sqrt{3}\sin x+3\cos x=\sqrt{18}$

Bài 3. Giải các phương trình sau

a) $\sin 3x-\sqrt{3}\cos 3x=2\sin 4x$

b) $\sin 5x+\sqrt{3}\cos 5x+2\cos 7x=0$

c) $\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

d) $\sqrt{3}\sin 7x-\cos 7x=2\sin\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)$

e) $\sqrt{3}\left(\sin 3x+\sin x\right)=\cos 3x+\cos x$

f) $\sin 8x-\cos 6x-\sqrt{3}\left(\sin 6x+\cos 8x\right)=0$

g) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)+\sqrt{3}\sin\left(\pi-2x\right)=2$

h) $2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+4\sin x\cos x-1=0$

i) $\left(\sin x+\cos x\right)^2=\sqrt{3}\cos 2x$

j) $\left(\sin x-\cos x\right)^2+2\cos^2 x=1$

k) $\left(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x\right)^2=5+\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

l) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

m) $4\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-3\sqrt{2}=0$

n) $\sqrt{3}\cos x+\sin x-\frac{3}{\sqrt{3}\cos x+\sin x-1}=3$

o) $8\sin x\sin 2x+6\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=5+7\cos x$

Bài 4. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+2\cos x+1}$

b) $y=\frac{5}{\sqrt{7}\sin 3x-4\sin x-3\cos 3x}$

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

a) $y=4\sin x-3\cos x+2$

b) $y=\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 2x+3$

Bài 6. Định m để các phương trình sau vô nghiệm

a) $m\sin x+\left(m+1\right)\cos x=1$

b) $m\left(\sin x+\cos x-1\right)=\sin x-\cos x+3$

Bài 7. Định m để các phương trình sau có nghiệm

a) $\left(m-1\right)\sin x-\left(m+1\right)\cos x=m+3$

b) $m\sin x+\left(m-7\right)\cos x=1$

4. Phương trình thuần nhất bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$

$$a\sin^2 x+b\sin x.\cos x+c\cos^2 x=d \qquad \left(a,b,c\neq 0\right) \qquad (2)$$

Phương pháp giải: Ta xét 2 trường hợp:

- TH1: Xét xem $\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ $\left(\Rightarrow\sin^2 x=1\right)$ có thỏa mãn phương trình (2) hay không.
- TH2: Xét $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Chia hai vế của phương trình (2) cho $\cos^2 x$ ta được:

$(2) \Leftrightarrow a\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + b\dfrac{\sin x.\cos x}{\cos^2 x} + c\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{d}{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow a\tan^2 x + b\tan x + c = d\left(1+\tan^2 x\right)$

$\Leftrightarrow (a-d)\tan^2 x + b\tan x + c - d = 0$ (Phương trình bậc hai theo $\tan x$)

Kết luận: Nghiệm của phương trình (1) là hợp nghiệm của TH1 và TH2.

Lưu ý:

- Ta có thể dùng công thức hạ bậc để đưa phương trình về phương trình bậc nhất đối với $\sin 2x$ và $\cos 2x$:

$$a\frac{1-\cos 2x}{2} + b\frac{\sin 2x}{2} + c\frac{1+\cos 2x}{2} = d$$

- Đối với phương trình đẳng cấp bậc ba:

$$a\sin^3 x + b\sin^2 x\cos x + c\sin x\cos^2 x + d\cos^3 x = e$$

hay phương trình bậc bốn trùng phương:

$$a\sin^4 x + b\sin^2 x\cos^2 x + c\cos^4 x = d$$

phương pháp giải tương tự.

Bài tập

Bài 1. Giải các phương trình sau

a) $2\sin^2 x - 5\sin x.\cos x - \cos^2 x = -2$

b) $4\sin^2 x - 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 4$

c) $\sqrt{3}\sin 2x + 2\cos^2 x - 1 = 0$

d) $2\cos^2 x + 3\sin 2x - 8\sin^2 x = 0$

Bài 2. Giải các phương trình sau

a) $3\sin^2 x + 8\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 0$

b) $(\sqrt{3}+1)\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x = (1-\sqrt{3})\cos^2 x$

c) $3\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 4$

d) $2\sin^2 x - 4\sin 2x + 8\cos^2 x = 1$

e) $5\sin^2 x + 6\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 5$

f) $6\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x - 2 = 0$

g) $\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x + 2\cos^2 x = \dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$

h) $3\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 3$

i) $-\sqrt{3}\sin^2 x + \sin 2x + \sqrt{3}\cos^2 x - 1 = 0$

j) $4\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 4$

k) $3\sin^2 x - 4\sin 2x + 5\cos^2 x - 2\cos 2x = 0$

l) $9\sin^2 x - 15\sin 2x + 25\cos^2 x = 25$

m) $2\sin^3 x + 4\cos^3 x = 3\sin x$

n) $\sin^3 x + \sin 2x\sin x - 3\cos^3 x = 0$

o) $4\sin^4 x + 5\sin^2 2x - 16\cos^4 x + 5 = 0$

p) $3\sin^4 x + 5\cos^4 x - 3 = 0$

Bài 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = \dfrac{\tan x}{\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x - \cos^2 x - 1}$

b) $y = \dfrac{2\sin x - \sqrt{x-3}}{2\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 5\cos^2 x - 2}$

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

a) $y = 2\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 5\cos^2 x - 2$

b) $y = 4\sin^2 x + 3\sin 2x - 2\cos^2 x - 2$

5. Phương trình đối xứng với $\sin x$ **và** $\cos x$

$$a(\sin x+\cos x)+b\sin x\cos x+c=0 \qquad (3)$$

Phương pháp giải:

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ $\left(t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\right)$

$\Rightarrow t^2=(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$

$\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

Khi đó, phương trình (3) trở thành:

$at+b\frac{t^2-1}{2}+c=0$ (phương trình bậc hai theo t)

Giải phương trình trên tìm được t và so với điều kiện $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Thay $t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ để tìm x.

6. Phương trình phản xứng với $\sin x$ **và** $\cos x$

$$a(\sin x-\cos x)+b\sin x\cos x+c=0 \qquad (4)$$

Phương pháp giải:

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ $\left(t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\right)$

$\Rightarrow t^2=(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x$

$\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$.

Khi đó, phương trình (4) trở thành:

$at+b\frac{1-t^2}{2}+c=0$ (phương trình bậc hai theo t)

Giải phương trình trên tìm được t và so với điều kiện $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Thay $t=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ để tìm x.

Bài tập

Bài 1. Giải các phương trình sau

a) $3(\sin x+\cos x)+2\sin x\cos x+3=0$

b) $\sin x-\cos x=2\sqrt{6}\sin x\cos x$

c) $\cos x-\sin x+6\sin x\cos x=1$

d) $\sin x\cos x=6(\sin x-\cos x)-1$

e) $\sin x+\cos x+\sin x\cos x=\frac{1}{2}-\sqrt{2}$

f) $\left(1+\sqrt{2}\right)(\sin x+\cos x)-2\sin x\cos x-1-\sqrt{2}=0$

Bài 2. Giải các phương trình sau

a) $2\sin 2x - 3\sqrt{6}\left(\sin x + \cos x\right) + 8 = 0$

b) $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin 2x = -1$

c) $\sin x - \sin 2x = \frac{1}{2} - \cos x$

d) $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}$

e) $\sin^3 x + \cos^3 x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$

7. Một số dạng phương trình lượng giác khác

Bài tập

Bài 1. Giải các phương trình sau (Dùng công thức cung liên kết)

a) $5\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 2 = 0$

b) $2\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) + \sqrt{3} = 0$

c) $3\cos\left(\frac{4\pi}{3} - x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0$

d) $\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) - \sqrt{2} = 0$

e) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3} - x\right) + 2 = 0$

f) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) - 2 = 0$

g) $\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - 2\sqrt{3} = 0$

h) $2\tan\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) - \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0$

i) $2\tan\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right) + \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0$

j) $\cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\cot\left(x - \frac{5\pi}{4}\right) + 3 = 0$

Bài 2. Giải các phương trình sau (Dùng công thức biến đổi tổng thành tích, tích thành tổng)

a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$

b) $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0$

c) $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

d) $\sin 3x - \sin x = \cos 3x - \cos x$

e) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$

f) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$

g) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$

h) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2$

i) $\sin 6x \sin 2x = \sin 5x \sin 3x$

j) $\sin 5x \sin x = \cos 6x \cos 2x$

k) $2\sin 6x \sin 2x = 2\sin 5x \sin 3x + \cos 6x$

Bài 3. Giải các phương trình sau

a) $\tan x + \cot x = 2$

b) $32\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = 1$

c) $16\sin x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = 1$

d) $2\cos^2 x - 6\sin^2 x + \tan^2 x + 1 = 0$

e) $\cos 3x \tan 5x = \sin 7x$

f) $2\tan x = \left(1 - \tan^2 x\right)\cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

l) $\sin\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right)$

m) $\frac{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}{\sin x + \sin 3x + \sin 5x} = \cot x$

n) $\frac{3 + \cos x - 3\sin x}{3\cos x + 1 - \sin x} = 1 - \frac{1}{2}\tan^2 \frac{x}{2}$

Chương 1. PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

§1. PHÉP BIẾN HÌNH

1. Phép biến hình

Phép biến hình là một quy tắc f, để với mỗi điểm M thuộc mặt phẳng ta xác định được một điểm M' duy nhất trong mặt phẳng đó. Điểm M' được gọi là ảnh của M qua phép biến hình đó, kí hiệu: $f(M) = M'$.

Nếu (H) là một hình thì tập hợp các điểm $M' = f(M)$ tạo thành hình (H') là ảnh của hình (H) qua phép biến hình f. Kí hiệu: $f(H) = (H')$.

2. Phép dời hình

Phép dời hình là một phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ:

$$\begin{cases} f(M) = M' \\ f(N) = N' \end{cases} \Rightarrow M'N' = MN$$

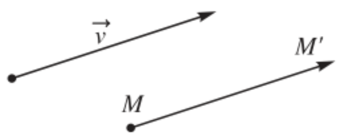
Tính chất: Phép dời hình biến:

- ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng;
- ba điểm không thẳng hàng thành ba điểm không thẳng hàng;
- đường thẳng thành đường thẳng;
- tia thành tia;
- đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó;
- tam giác thành tam giác bằng nó;
- góc thành góc bằng nó;
- đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

§2. PHÉP TỊNH TIẾN

1. Định nghĩa

Phép biến hình biến điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ được gọi là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$. Kí hiệu: $T_{\vec{v}}$.



$$T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$$

($\vec{v}$ được gọi là vectơ tịnh tiến)

Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{0}$ là phép đồng nhất: $T_{\vec{0}}(M) = M$.

2. Tính chất

- Phép tịnh tiến là một phép dời hình do đó có tất cả các tính chất của phép dời hình.
- Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng

ban đầu.

3. Biểu thức tọa độ

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(x;y)$ và vectơ $\vec{u}=(a;b)$. Khi đó:

$$T_{\vec{u}}(M)=M'(x';y') \Leftrightarrow \begin{cases} x'=a+x \\ y'=b+y \end{cases}$$

Bài tập

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy, tìm ảnh của điểm $A(2;5)$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(1;2)$.

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng $d: 2x+y-9=0$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(1;-4)$.

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình của đường tròn (C') là ảnh của đường tròn $(C): x^2+(y-1)^2=9$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{a}=(2;-4)$.

Bài 4. Cho $M(2;1)$, tìm tọa độ điểm M' biết

a) $T_{\vec{u}}(M)=M'$ với $\vec{u}=(-2;3)$

b) $T_{\overrightarrow{AB}}(M)=M'$ với $A(-2;3)$, $B(1;2)$.

Bài 5. Cho tam giác ABC với $A(-3;1)$, $B(2;-1)$, $C(1;5)$ và $\vec{u}=(-4;2)$.

a) Tìm tọa độ điểm D biết $T_{\vec{u}}(A)=D$.

b) Tìm tọa độ điểm E biết $T_{\vec{u}}(E)=B$.

c) Tìm tọa độ điểm F là ảnh của điểm B qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$.

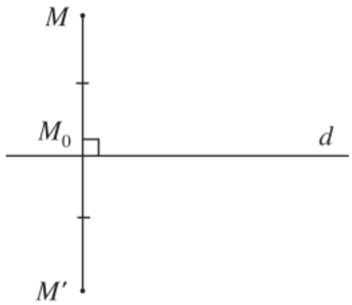
d) Tìm tọa độ điểm G là ảnh của điểm C qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{CB}$.

e) Tìm tọa độ điểm H là ảnh của điểm A qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{CA}$.

§3. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

1. Định nghĩa

Cho đường thẳng d. Phép biến hình biến điểm M thành M' sao cho d là đường trung trực của đoạn thẳng MM' được gọi là phép đối xứng qua đường thẳng d hay phép đối xứng trục d. Kí hiệu: $Đ_d$.

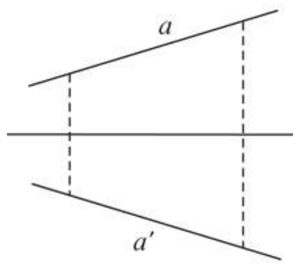


$M' = Đ_d(M) \Leftrightarrow d$ là đường trung trực của MM'

(Đường thẳng d gọi là trục đối xứng)

2. Tính chất

Phép đối xứng trục là một phép dời hình.



3. Trục đối xứng của một hình

Đường thẳng d được gọi là trục đối xứng của hình (H) nếu phép đối xứng trục d biến (H) thành chính nó. Khi đó ta nói (H) là hình có trục đối xứng.

4. Biểu thức tọa độ

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(x;y)$:

- $M_1(x_1;y_1)$ đối xứng với M qua trục $x'Ox \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = -y \end{cases}$.
- $M_2(x_2;y_2)$ đối xứng với M qua trục $y'Oy \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x \\ y_2 = y \end{cases}$.
- $M_3(x_3;y_3)$ đối xứng với M qua đường thẳng $(d): ax + by + c = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \text{ vuông góc với vectơ chỉ phương của } d \\ \text{Trung điểm } I\left(\dfrac{x+x'}{2};\dfrac{y+y'}{2}\right) \text{ của } MM' \text{ thuộc } d \end{cases}$$

<u>**Bài tập**</u>

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(-2;5)$. Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua

a) Trục $x'Ox$

b) Trục $y'Oy$

c) Đường thẳng $(d): x - 2y - 3 = 0$.

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Tìm ảnh của (C) qua phép đối xứng trục với trục đối xứng là

a) Trục $x'Ox$
b) Trục $y'Oy$
c) Đường thẳng $(d): 2x - y + 1 = 0$.

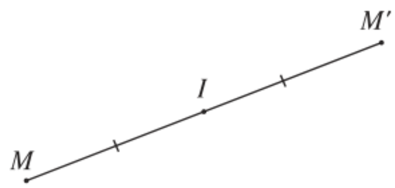
Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, lập phương trình đường thẳng (d') đối xứng với $(d): x - y - 3 = 0$ qua

a) Trục $x'Ox$
b) Trục $y'Oy$
c) Đường thẳng $(\Delta): x + 3y + 1 = 0$.

§4. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

1. Định nghĩa

Phép biến hình biến điểm I thành chính nó, biến mỗi điểm M khác điểm I thành điểm M' sao cho I là trung điểm của MM' được gọi là phép đối xứng tâm I. Kí hiệu: $Đ_I$.



$M' = Đ_I(M) \Leftrightarrow I$ là trung điểm của MM'
(I được gọi là tâm đối xứng)

2. Tính chất

Phép đối xứng tâm là một phép dời hình.

3. Biểu thức tọa độ

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $I(a;b)$ và điểm $M(x;y)$:

$$Đ_I(M) = M'(x';y') \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$

4. Tâm đối xứng của một hình

Điểm I được gọi là tâm đối xứng của hình (H) nếu phép đối xứng tâm I biến hình (H) thành chính nó. Khi đó ta nói (H) là hình có tâm đối xứng.

Bài tập

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy, tìm ảnh của điểm $A(5;3)$ qua phép đối xứng tâm $I(4;1)$.

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng $(d): 2x+y-9=0$ qua phép đối xứng tâm $K(1;-2)$.

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình của đường tròn (C') là ảnh của đường tròn $(C): x^2+(y-1)^2=9$ qua phép đối xứng tâm $I(-1;-1)$.

Bài 4.

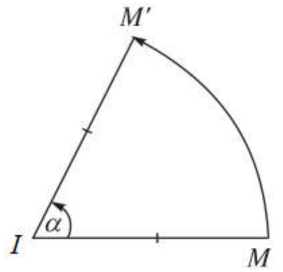
a) Tìm tọa độ điểm M′ là ảnh của M(–1;2) qua $Đ_I$ với I(1;–2).
b) Tìm tọa độ điểm N′ là ảnh của N(3;–4) qua $Đ_A$ với A(–1;2).
c) Tìm tọa độ điểm K′ là ảnh của K(–2;–1) qua $Đ_J$ với J(–3;2).

§5. PHÉP QUAY

1. Định nghĩa

Phép biến hình biến điểm I thành chính nó, biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $IM' = IM$ và $(IM; IM') = \varphi$ được gọi là phép quay tâm I góc φ.

Kí hiệu: $Q_{(I;\varphi)}$.



$$M' = Q_{(I;\varphi)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} IM' = IM \\ (IM; IM') = \varphi \end{cases}$$

(I gọi là tâm quay, góc φ là góc quay)

Nhận xét:

- Chiều dương của phép quay là chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ.
- Với $k \in \mathbb{Z}$ ta có $Q_{(I;k2\pi)}$ là phép đồng nhất và $Q_{(I;(2k+1)\pi)}$ là phép đối xứng tâm I.

2. Tính chất

Phép quay là một phép dời hình.

3. Biểu thức tọa độ

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho gốc tọa độ $O(0;0)$ và điểm $M(x;y)$ và góc φ:

- Nếu $\varphi = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ thì $Q_{(O;\varphi)}(M) = M'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$
- Nếu $\varphi = \pi + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ thì $Q_{(O;\varphi)}(M) = M'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$
- Nếu $\varphi = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ thì $Q_{(O;\varphi)}(M) = M'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$

Bài tập

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(3;-2)$, $B(0;4)$, $C(-5;-1)$. Gọi A',B',C' lần lượt là ảnh của A,B,C qua phép quay tâm O với góc quay $\alpha = 45°$. Tìm tọa độ của A',B',C'.

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ $(d): x-3y+6=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-6x+4y-3=0$. Gọi (d') và (C') lần lượt là ảnh của (d) và (C) qua phép quay tâm K với góc quay φ. Lập phương trình của (d') và (C') biết:

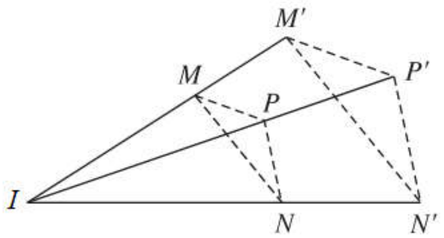
a) $K \equiv O(0;0)$, $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ b) $K(-2;1)$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(1;-2)$, $B(-4;9)$, $C(3;5)$. Xác định tọa độ điểm G' là ảnh của trọng tâm G của tam giác ABC qua phép quay tâm $O(0;0)$ với góc quay $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

§6. PHÉP VỊ TỰ

1. Định nghĩa

Cho điểm I cố định và một số $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$ được gọi là phép vị tự tâm I tỉ số k. Kí hiệu: $V_{(I;k)}$.



$$M' = V_{(I;k)}(M') \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$$

(I gọi là tâm vị tự, k là tỉ số vị tự)

2. Tính chất

Phép vị tự:

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa ba điểm đó;
- Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó;
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng có độ dài bằng $|k|$ lần tạo ảnh;

 Nghĩa là: nếu $\begin{cases} M' = V_{(I;k)}(M) \\ N' = V_{(I;k)}(N) \end{cases}$ thì $\begin{cases} \overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN} \\ M'N' = |k|MN \end{cases}$

- Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tam giác đã cho với tỉ số đồng dạng $|k|$;
- Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính $|k|.R$.

3. Biểu thức tọa độ

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $I(a;b)$, số $k \neq 0$ và điểm $M(x;y)$:

$$V_{(I;k)}(M) = M'(x';y') \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx + (1-k)a \\ y' = ky + (1-k)b \end{cases}$$

4. Tâm vị tự của hai đường tròn

Nếu có phép vị tự tâm O, tỉ số k biến đường tròn này thành đường tròn kia thì O được gọi là tâm vị tự của hai đường tròn đó.

Cách xác định tâm vị tự O của phép vị tự biến $(I;R)$ thành $(I';R')$

1) Hai đường tròn không đồng tâm $(I;R)$ và $(I';R')$

- $R = R'$: phép vị tự tâm O (là trung điểm II'), tỉ số $k = -1$ (cũng chính là phép đối xứng tâm O).
- $R \neq R'$: có hai phép vị tự

   i) Phép vị tự tâm $O_1\left(\overrightarrow{O_1I'} = \frac{R'}{R}\overrightarrow{O_1I}\right)$, tỉ số $k_1 = \frac{R'}{R}$.

   ii) Phép vị tự tâm $O_2\left(\overrightarrow{O_2I'} = -\frac{R'}{R}\overrightarrow{O_2I}\right)$, tỉ số $k_2 = -\frac{R'}{R}$.

2) Hai đường tròn đồng tâm $(I;R)$ và $(I;R')$.

Có hai phép vị tự cùng tâm I, tỉ số $\frac{R'}{R}$ và $-\frac{R'}{R}$.

<u>Bài tập</u>

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy, tìm điểm D' là ảnh của $D(1;-2)$ qua $V_{(K;2)}$ với $K(1;-2)$.

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng $(d): 2x + y - 9 = 0$ qua phép vị tự $V_{(H;3)}$ với $H(1;2)$.

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình của đường tròn (C') là ảnh của đường tròn $(C): x^2 + (y-1)^2 = 9$ qua $V_{(K;-2)}$ với $K(1;-2)$.

Bài 4. Cho A(1;–2); I (2;3); B(–1;2); J (–2;–3) C(2;–1); H (1;2); D(1;–2); K (–2;1)

a) Tìm điểm A′ là ảnh của A qua $V_{(I;2)}$.

b) Tìm điểm B′ là ảnh của B qua $V_{(J;-2)}$.

c) Tìm điểm C′ là ảnh của C qua $V_{(H;3)}$.

Bài 5. Cho đường thẳng $(d): x + y - 2 = 0$.

a) Viết phương trình đường thẳng (d_1) là ảnh của d qua $V_{(I;2)}$ với $I(2;3)$.

b) Viết phương trình đường thẳng (d_2) là ảnh của d qua $V_{(J;-2)}$ với $J(-2;-3)$.

c) Viết phương trình đường thẳng (d_3) là ảnh của d qua $V_{(H;3)}$ với $H(1;2)$.

d) Viết phương trình đường thẳng (d_4) là ảnh của d qua $V_{(K;2)}$ với $K(-2;1)$.

Bài 6. Cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=25$.

a) Viết phương trình đường tròn (C_1) là ảnh của (C) qua $V_{(J;-2)}$ với $J(-2;-3)$.

b) Viết phương trình đường tròn (C_2) là ảnh của (C) qua $V_{(I;2)}$ với $I(2;3)$.

c) Viết phương trình đường tròn (C_3) là ảnh của (C) qua $V_{(H;3)}$ với $H(1;2)$.

d) Viết phương trình đường tròn (C_4) là ảnh của (C) qua $V_{(K;2)}$ với $K(-2;1)$.

Chương 2. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

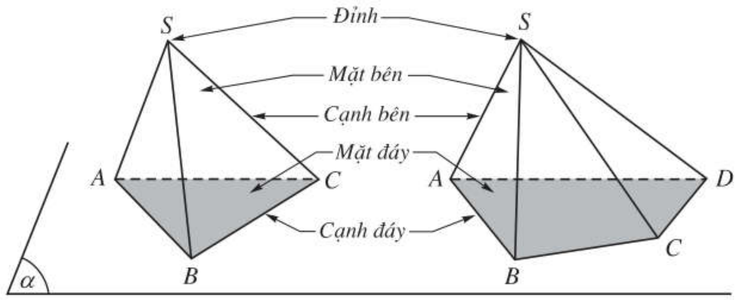
1. Các tính chất thừa nhận của hình học không gian

- Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.
- Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.
- Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.
- Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.
- Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

2. Các cách xác định mặt phẳng

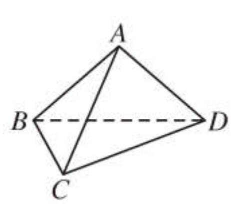
- Ba điểm A, B, C không thẳng hàng xác định mặt phẳng duy nhất.
  Kí hiệu: (ABC), (ACB), …
- Đường thẳng d và một điểm A nằm ngoài d xác định mặt phẳng duy nhất.
  Kí hiệu: (A, d) hay (d, A).
- Hai đường thẳng a, b cắt nhau xác định mặt phẳng duy nhất.
  Kí hiệu: (a, b).
- Hai đường thẳng a, b song song với nhau xác định mặt phẳng duy nhất.
  Kí hiệu: (a, b).

3. Hình chóp



Hình chóp gồm một đỉnh và đáy là một đa giác.
Kí hiệu: $S.ABC$, $S.ABCD$ …

4. Tứ diện



Tứ diện là hình gồm bốn đỉnh không đồng phẳng tạo ra bốn mặt là bốn tam giác.
Tứ diện đều có bốn mặt là tam giác đều (tất cả các cạnh đều bằng nhau).

Vấn đề 1: Giao tuyến của hai mặt phẳng

Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt, ta cần tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng. Khi đó, đường thẳng qua hai điểm chung đó là giao tuyến của hai mặt phẳng.

$$\begin{cases} A \in (\alpha) \text{ và } A \in (\beta) \\ B \in (\alpha) \text{ và } B \in (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = AB$$

Bài tập

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD (ABCD có các cạnh đối không song song).

a) Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC).
b) Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD).
c) Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD).

Bài 2. Cho tứ diện SABC. Trên các cạnh SA; SB; SC lần lượt lấy 3 điểm M; N; P lần lượt sao cho AM = 2SM ; SN = 2NB ; SP = PC.

a) Tìm giao tuyến của (MNP) và (ABC).
b) Tìm giao tuyến của (ANP) và (ABC).

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang đáy lớn AB. Lấy điểm H thuộc cạnh SB. Tìm giao tuyến của (AHD) và (SBC).

Bài 4. Cho tứ diện ABCD. Lấy điểm M, N lần lượt trên đoạn AB, AC sao cho MN không song song BC và điểm I thuộc cạnh CD.

a) Tìm giao tuyến của (MNI) và (BCD).
b) Tìm giao tuyến của (MNI) và (ABD).

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD (các cạnh đáy không song song). Lấy I thuộc cạnh SA, J thuộc cạnh SB và K thuộc cạnh CD sao cho I là trung điểm SA, SJ = 2JB và CK = 2KD.

a) Tìm giao tuyến của (IJK) và (ABCD).
b) Tìm giao tuyến của (IJK) và (SBC).
c) Tìm giao tuyến của (IJK) và (SCD).

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD và điểm M; N trên đoạn SD; SC sao cho MN không song song CD.

a) Tìm giao tuyến của (AMN) và (ABCD).
b) Tìm giao tuyến của (AMC) và (AND).
c) Tìm giao tuyến của (SBD) và (AMN).

Bài 7. Cho hình chóp S.ABC. Gọi H, K lần lượt là trọng tâm ΔSAB và ΔSBC, M là trung điểm AC. Lấy điểm I là điểm thuộc đoạn SM sao cho $SI = \frac{3}{4}SM$.

a) Tìm giao tuyến của (IHK) và (ABC).
b) Tìm giao tuyến của (IHK) và (SAC).

Bài 8. Cho hình chóp S.ABCD, $AC \cap BD = O$. Lấy điểm M; N lần lượt trên đoạn SA; SB và điểm G ở trong ΔABO sao cho OM không song song SC, ON không song song SD.

a) Tìm giao tuyến của (MNO) và (SCD).
b) Tìm giao tuyến của (MNO) và (SGD).

Bài 9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi 2 điểm M, G lần lượt là trọng tâm ΔSAB và ΔSAD. Lấy điểm N thuộc đoạn SG, điểm P thuộc miền trong tứ giác ABCD.

a) Tìm giao tuyến của (MNP) và (ABCD).
b) Tìm giao tuyến của (MNP) và (SAC).
c) Tìm giao tuyến của (MNP) và (SCD).

Bài 10. Cho tứ diện ABCD và điểm M là trung điểm AB, N là trung điểm CD; G nằm trong tam giác BCD sao cho NG không song song BD.

a) Tìm giao tuyến của (MCD) và (NAB).
b) Tìm giao tuyến của (GMN) và (ACD).

Bài 11. Cho tứ diện S.ABC. Lấy điểm E; F lần lượt trên đoạn SA; SB và điểm G ở trong tam giác ABC.

a) Tìm giao tuyến của (EFG) và (SBC).
b) Tìm giao tuyến của (EFG) và (SGC).

Bài 12. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi G, H lần lượt là trọng tâm ΔSAB và ΔSCD.

a) Tìm giao tuyến của (SGH) và (ABCD).
b) Tìm giao tuyến của (SGH) và (SAC).
c) Tìm giao tuyến của (BGH) và (SAD).
d) Tìm giao tuyến của (CGH) và (SBD).

Bài 13. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang (AB // CD). Lấy điểm M thuộc cạnh SC.

a) Tìm giao tuyến của (SAC) và (MBD).
b) Tìm giao tuyến của (ADM) và (SBC).

Vấn đề 2: Giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α). Tìm I là giao điểm của a và (α).

Cách 1: Tìm trong mặt phẳng (α) một đường thẳng b cắt đường thẳng a tại I.

Khi đó: $I = a \cap b \Rightarrow \begin{cases} I \in a \\ I \in b \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \cap (\alpha) = I$

Cách 2: Chọn mặt phẳng (β) chứa a sao cho dễ xác định giao tuyến d của (α) và (β). Trong mặt phẳng (β), gọi I là giao điểm của a và d.

Khi đó: $I = a \cap d \Rightarrow \begin{cases} I \in a \\ I \in d \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \cap (\alpha) = I$.

Bài tập

Bài 1. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang đáy lớn AD; cho điểm M trên cạnh SD. Tìm giao điểm của

a) (ABM) với CD b) (ABM) với SC c) (MBC) với SA

Bài 2. Cho tứ diện SABC. Lấy các điểm M; N; I lần lượt trên cạnh SB, SC, AC sao cho MN không song song BC. Tìm giao điểm của

a) MN với (ABC) b) AB với (IMN)

Bài 3. Cho hình chóp SABC. Lấy các điểm M, N lần lượt trên cạnh SA, SB sao cho MN không song song AB. Lấy điểm O trong tam giác ABC. Tìm giao điểm của

a) (OMN) với AB b) (OMN) với AC c) (OMN) với SC

Bài 4. Cho tứ diện ABCD. Lấy các điểm M, N lần lượt là trung điểm cạnh AC, BC. Trên đoạn BD lấy điểm K sao cho BK = 2KD.

a) Tìm giao điểm E của CD với (MNK).
b) Tìm giao điểm F của AD với (MNK).
c) Tìm giao tuyến của (MNK) và (ABD).

Bài 5. Cho tứ diện SABC. Gọi các điểm I, H, M lần lượt là trung điểm cạnh SA; AB và IH. Trên đoạn SC lấy điểm K sao cho CK = 3KS.

a) Tìm giao điểm L của BC với (IHK).
b) Tìm giao điểm N của KM với (ABC).

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD. Lấy các điểm M, N, Q lần lượt trên cạnh SA, SB, SC. Tìm giao điểm đường thẳng SD với (NMQ).

Bài 7. Cho hình chóp S.ABCD. Lấy các điểm M, N,Q lần lượt trên cạnh SA, SB, SD. Tìm giao điểm của đường thẳng SC với mặt phẳng (NMQ).

Bài 8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang đáy lớn AB. Gọi I, J là trung điểm SA, SB. Lấy điểm M tùy ý trên cạnh SD. Tìm giao điểm của

a) IM và (SBC) b) JM và (SAC) c) SC và (IJM)

Bài 9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. M là trung điểm SB; N là trọng tâm tam giác SCD. Xác định giao điểm của

a) MN và (ABCD) b) MN và (SAC)
c) SC và (MAN). d) SA và (CMN).

Bài 10. Cho tứ diện SABC. Lấy điểm M là trung điểm SA ; N là trọng tâm SBC ; P nằm trong tam giác ABC. Tìm giao điểm của

a) MN với (ABC) b) (MNP) với SB
c) (MNP) với SC d) NP với (SAB)

Bài 11. Cho hình chóp S.ABCD, gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm ΔSAB và ΔSCD ; Tìm giao điểm của

a) BD và $\left(SG_1G_2\right)$ b) G_1G_2 và (SAD) c) SD và $\left(BG_1G_2\right)$
d) AC và $\left(SG_1G_2\right)$ e) SA và $\left(CG_1G_2\right)$

Vấn đề 3: Chứng minh ba điểm thẳng hàng

Chứng minh ba điểm là điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt.

$$\begin{cases} A,B,C \in (\alpha) \\ A,B,C \in (\beta) \end{cases} \Rightarrow A,B,C \in (\alpha) \cap (\beta) \Rightarrow A,B,C \text{ thẳng hàng}$$

Bài tập

Bài 1. Cho tứ diện SABC. Trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy M, N, P sao cho MN cắt AB tại I; NP cắt BC tại J và MP cắt AC tại K. Chứng minh rằng I, J, K thẳng hàng.

Bài 2. Cho tứ diện ABCD có G là trọng tâm ΔBCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm AB, BC, CD.

a) Tìm giao tuyến của (AND) và (ABP).
b) Cho $AG \cap MP = I$; $CM \cap AN = J$. Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD; gọi E; F; H lần lượt là các điểm thuộc cạnh SA, SB, SC.

a) Tìm giao điểm K của SD và (EFH).
b) AC cắt BD tại O, EH cắt FK tại I . Chứng minh 3 điểm S, I, O thẳng hàng.
c) AD cắt BC tại M, EK cắt FH tại N .Chứng minh 3 điểm S, M, N thẳng hàng.
d) AB cắt CD tại P, EF cắt HK tại Q . Chứng minh 3 điểm S, P, Q thẳng hàng.

Bài 4. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB, AC, BD; MN cắt BC tại I; MP cắt AD tại J; NJ cắt IP tại K. Chứng minh rằng C; D; K thẳng hàng.

Bài 5. Cho tứ diện SABC. Gọi D, E, F lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB, SB, AC; DE cắt SA tại H; DF cắt BC tại K; EK cắt HF tại G. Chứng minh rằng S; G; C thẳng hàng.

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M và N là trung điểm của AB, SC.

a) Tìm giao điểm I của AN và (SBD).
b) Tìm giao điểm K của MN và (SBD).
c) Tính tỉ số $\frac{KM}{MN}$.
d) Chứng minh rằng : B, I, K thẳng hàng. Tính tỉ số $\frac{IB}{IK}$.

Bài 7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M; N lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA, SC.

a) Tìm giao điểm I của đường thẳng SO với (MNB) và giao điểm K của đường thẳng SD với mặt phẳng (MNB).
b) Xác định giao tuyến của (MNB) và (SAD).
c) Xác định giao tuyến của (MNB) và (SDC).
d) Gọi E là giao điểm của KN và CD, F là giao điểm của KM và AD. Chứng minh rằng ba điểm E, B, F thẳng hàng.

Vấn đề 4: Chứng minh ba đường thẳng đồng quy

Ta tìm giao điểm của hai đường thẳng và chứng minh điểm đó thuộc đường thẳng thứ ba.

$\begin{cases} d_1 \cap d_2 = I \\ I \in d_3 \end{cases} \Rightarrow d_1, d_2, d_3$ đồng quy

Bài tập

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A′, B′, C′, D′. Giả sử AB cắt CD tại E, A′B′ cắt C′D′ tại E′.

a) Chứng minh : S, E, E′ thẳng hàng.
b) Chứng minh : A′C′, B′D′, SO đồng quy.

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD; O là giao điểm AC và BD. Lấy điểm M trên cạnh SC.

a) Tìm giao điểm N của SB và (ADM).
b) Chứng minh : SO, AM, DN đồng quy.

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD, trên cạnh SC lấy một điểm E không trùng với S và C.

a) Tìm giao điểm F của đường thẳng SD với (ABE).
b) Giả sử AB không song song với CD. Chứng minh AB, CD, EF đồng quy.

Bài 4. Cho tứ diện SABC. Lấy E; F; I lần lượt trên các cạnh SB, BC, CA sao cho EF cắt SC tại H; IF cắt AB tại K. Chứng minh rằng: KE, HI, SA đồng quy.

Vấn đề 5: Tìm tập hợp điểm M hoặc chứng minh M di động trên đường thẳng cố định

Chứng minh M thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng cố định.

$$\begin{cases} d=(\alpha)\cap(\beta) \text{ (cố định)} \\ M\in d \end{cases} \Rightarrow M \text{ di động trên } d \text{ cố định}$$

<u>Bài tập</u>

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD (các cạnh đối của tứ giác đáy không song song). Lấy M tùy ý trên cạnh SB.

a) Tìm giao điểm N của SC và (ADM).
b) Gọi K là giao điểm của AN và DM, L là giao điểm của AM và DN. Tìm tập hợp các điểm K; L khi M di động trên đoạn SB.

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD với đáy là hình thang, đáy lớn AD, M là điểm lưu động trên SB, mặt phẳng (MDC) cắt SA tại N. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

a) Tìm giao điểm của mặt phẳng (MAD) với SO và SC.
b) Gọi H là giao điểm của DM và CN. Tìm tập hợp các điểm H.

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD; mặt phẳng (P) di động cắt SA; SC; SD lần lượt tại E; F; G.

a) Tìm giao điểm H của mặt phẳng (P) với SB.
b) Gọi I là giao điểm của EF và HG. Tìm tập hợp các điểm I.
c) Gọi J là giao điểm của EG và HF. Tìm tập hợp các điểm J.

Vấn đề 6: Thiết diện của hình chóp khi cắt hình chóp bởi một mặt phẳng

Để xác định thiết diện của một hình chóp với mặt phẳng (α) ta thực hiện như sau:

- Tìm giao điểm của (α) với một cạnh của hình chóp.

- Từ điểm chung đó, xác định giao tuyến đầu tiên của (α) với một mặt (chứa cạnh trên) của hình chóp.
- Cho giao tuyến này cắt các cạnh của mặt đó của hình chóp, ta sẽ được các điểm chung mới của (α) với các mặt khác. Từ đó xác định được các giao tuyến mới với các mặt này.
- Tiếp tục như trên cho đến khi các giao tuyến khép kín thành một đa giác, ta được thiết diện của (α) và hình chóp.

Bài tập

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD và điểm M trên cạnh SD. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (ABM).

Bài 2. Cho tứ diện ABCD; I là trung điểm AD; J là điểm đối xứng của D qua C; K là điểm đối xứng của D qua B. Xác định thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (IJK).

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là tứ giác lồi. M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, BC, CD. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Bài 4. Cho hình chóp S.ABC. M; N lần lượt là trọng tâm tam giác SAB; SBC; P là trung điểm SC. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD; M; N thuộc cạnh SA; SB sao cho $SM = \frac{1}{3}SA;\ SN = \frac{2}{3}SB$.

G là trọng tâm tam giác SCD.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng MN với (ABCD).
b) Tìm giao điểm của đường thẳng MG với (ABCD).
c) Tìm giao điểm của đường thẳng AD với (MNG).
d) Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNG).

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là tứ giác lồi. M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CD. P là một điểm nằm trong tam giác SBD. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNP).

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng a,b trong không gian

- a,b đồng phẳng: có ba vị trí tương đối là:
  - $a//b$: a và b không có điểm chung.

- a cắt b: a và b có một điểm chung duy nhất.
- $a \equiv b$: a và b có vô số điểm chung.

- a,b không đồng phẳng: a và b chéo nhau.

2. Hai đường thẳng song song

Định nghĩa: $a // b \Leftrightarrow \begin{cases} a,b \text{ đồng phẳng} \\ a \cap b = \varnothing \end{cases}$

Các định lý:

- Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.
- Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.
- Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.
- Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

Dạng toán 1: Chứng minh hai đường thẳng song song

Để chứng minh hai đường thẳng song song ta có thể dùng một trong các cách sau:

- Dùng phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng: Xét mặt phẳng chứa a,b, dùng các định lý đường trung bình, định lý Thalès đảo…
- Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với một đường thẳng thứ ba: $\begin{cases} a // b \\ b // c \end{cases} \Rightarrow a // c$
- Áp dụng định lý về giao tuyến song song: $\begin{cases} b // c \\ b \subset (\alpha) \\ c \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = a \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a // b // c \\ a \equiv b \\ a \equiv c \end{array} \right.$

Dạng toán 2: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng lần lượt chứa hai đường thẳng song song

Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng lần lượt chứa hai đường thẳng song song ta thực hiện như sau:

- Tìm một điểm chung của hai mặt phẳng.
- Xác định phương của giao tuyến (là đường thẳng đi qua điểm chung và song song với hai đường thẳng trên).

$$\begin{cases} A \in (\alpha) \cap (\beta) \\ a \subset (\alpha) \\ b \subset (\beta) \\ a // b \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = x'Ax \text{ với } x'Ax // a // b$$

Dạng toán 3: Chứng minh hai đường thẳng a,b chéo nhau

Dùng phương pháp chứng minh phản chứng:

Giả sử a,b đồng phẳng $\Rightarrow$ vô lý.

Bài tập

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành.

a) Xác định giao tuyến của (SAB) và (SCD); giao tuyến của (SAD) và (SBC).
b) Điểm M thuộc cạnh SC; xác định giao tuyến 2 mặt phẳng (ABM) và (SCD).
c) Điểm N thuộc cạnh SB; xác định giao tuyến 2 mặt phẳng (SAB) và (NCD).

Bài 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi G_1, G_2 là trọng tâm Δ ABC và Δ ACD. Xác định giao tuyến của

a) (CG_1G_2) và (BCD) b) (CG_1G_2) và (BAD) c) (AG_1G_2) và (ABD)

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành; G_1, G_2 là trọng tâm Δ SAB và Δ SAD.

a) Chứng minh tứ giác G_1G_2DB là hình thang.
b) Xác định giao tuyến 2 mặt phẳng (AG_1G_2) và (SBD).

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành; M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB.

a) Điểm E thuộc cạnh SC, xác định giao điểm của đường thẳng SD và (MNE).
b) Điểm H thuộc cạnh AD, xác định giao điểm của đường thẳng BC và (MNH).

Bài 5. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là trọng tâm Δ ABC và Δ ABD; E, F lần lượt là trung điểm của BC, AC.

a) Chứng minh rằng: IJ // CD.
b) Tìm giao tuyến (DEF) và (ABD).

Bài 6. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và BD. Lấy P là điểm trên cạnh AB. Gọi $I = PD \cap AN$; $J = PC \cap AM$.

a) Chứng minh rằng: IJ // CD.
b) Gọi H thuộc cạnh CD. Tìm giao tuyến của (ABH) và (AMN).
c) Tìm giao điểm MI và (ACD).

Bài 7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, đáy lớn là AB. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA, SB.

a) Chứng minh rằng: EF // CD.
b) Trong mặt phẳng (SAB). Gọi J là điểm đối xứng của A qua F. Chứng minh rằng: SJ // CD.

Bài 8. Cho hai hình vuông ABCD và ABEF không đồng phẳng. Trên các đường chéo AC, BF lấy M, N sao cho $\frac{AM}{AC}=\frac{BN}{BF}=\frac{1}{3}$. Chứng minh rằng : MN // DE.

§3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

1. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α):

$a\subset(\alpha)$: a và (α) có hai điểm chung phân biệt.

a cắt (α): a và (α) có một điểm chung duy nhất $M=d\cap(\alpha)$.

$a//(\alpha)$: a và (α) không có điểm chung.

2. Đường thẳng song song với mặt phẳng

Định nghĩa: $a//(\alpha)\Leftrightarrow a\cap(\alpha)=\varnothing$

Tính chất:

- Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b nào đó nằm trong mặt phẳng (α) không chứa a thì a song song với (α).

$$\begin{cases} a//b \\ b\subset(\alpha) \Rightarrow a//(\alpha) \\ a\not\subset(\alpha) \end{cases}$$

- Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a.

$$\begin{cases} a//(\alpha) \\ a\subset(\beta) \qquad \Rightarrow a//b \\ (\alpha)\cap(\beta)=b \end{cases}$$

- Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau và cùng song song với đường thẳng a thì giao tuyến của (α) và (β) cũng song song với a.

$$\begin{cases} a//(\alpha) \\ a//(\beta) \qquad \Rightarrow a//b \\ (\alpha)\cap(\beta)=b \end{cases}$$

- Nếu hai đường thẳng a và b chéo nhau thì có duy nhất một mặt phẳng chứa

a và song song với b.

Vấn đề 1: Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Để chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (α), ta chứng minh a không nằm trong (α) và a song song với một đường thẳng b nằm trong (α).

$$\begin{cases} a // b \\ b \subset (\alpha) \\ a \not\subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a // (\alpha)$$

<u>Bài tập</u>

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình bình hành. M, N thuộc cạnh SA, SB sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB}$. Chứng minh rằng:

a) AD // (SBC); DC // (SAB)

b) MN // (ABCD); AB // (MNCD)

c) MN // (SDC)

Bài 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm của Δ ABD. Lấy điểm I thuộc cạnh BC sao cho BI = 2IC. Chứng minh rằng: IG // (ACD).

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi G_1, G_2 là trọng tâm các tam giác SBC, SCD.

a) Xác định giao điểm E của BC với (SG_1G_2). Chứng minh rằng: G_1G_2 // (SBD).

b) Giả sử mặt phẳng (CG_1G_2) cắt SB, SD lần lượt tại H, K. Chứng minh rằng: HK // (ABCD).

Bài 4. Cho hình bình hành ABCD và ABEF không đồng phẳng.

a) Gọi M, N là trọng tâm Δ BCD và Δ AEF. Chứng minh rằng: MN // (CEF).

b) Gọi P, Q là trọng tâm Δ ABD và Δ ABE. Chứng minh rằng: PQ // (CEF).

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, SA.

a) Chứng minh rằng: SB // (MNP).

b) Chứng minh rằng: SC // (MNP).

c) Gọi K là trọng tâm của tam giác SAD. Chứng minh rằng: SB // (AKC).

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm Δ SAB và điểm E trên cạnh AD sao cho AD = 3AE. Gọi M là trung điểm AB.

a) Tìm giao tuyến (SAB) và (SCD).
b) Chứng minh rằng: EG // (SCD).
c) Đường thẳng qua E song song với AB cắt MC tại F. Chứng minh rằng: GF // (SCD).

Bài 7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi K là trọng tâm ΔSCD, I là trung điểm AB.

a) Xác định giao điểm E của đường thẳng SD với mặt phẳng (CIK).
b) Xác định giao điểm F của đường thẳng CD với mặt phẳng (SIK).
c) Chứng minh rằng: SC // (IEF).
d) Chứng minh rằng: SA // (BDK).

Bài 8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi H là trọng tâm ΔSAB. Lấy I là điểm thuộc cạnh CD sao cho CI = 2ID. Chứng minh: HO // (SAI).

Bài 9. Cho hình chóp S.ABC; I là trung điểm SA. Gọi G là trọng tâm ΔSBC.

a) Xác định giao điểm E của đường thẳng IG với mặt phẳng (ABC).
b) Chứng minh rằng: AB // (SCE).

Bài 10. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, BC và G là trọng tâm ΔACD.

a) Tìm giao điểm H của MG và (BCD).
b) Tìm giao điểm K của NG và (ABD).
c) Chứng minh rằng: MN // (DHK).

Bài 11. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. M là trung điểm SA. Gọi G, H là trọng tâm ΔSBC, ΔSCD.

a) Tìm giao điểm E của MG và (ABCD).
b) Tìm giao điểm F của MH và (ABCD).
c) Chứng minh rằng: EF // (SBD).
d) Chứng minh rằng: DF // (SBE).

Bài 12. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. M là trung điểm SA. Gọi G, H là trọng tâm ΔACD, ΔABC .

a) Tìm giao điểm E của CG và (SAB).
b) Tìm giao điểm F của AH và (SCD).
c) Chứng minh rằng: ED // (SBF), GF // (SHE).
d) Gọi I là giao điểm của MG và (SCD). Chứng minh rằng: MO // (ADI).

Bài 13. Cho hình chóp S.ABC; M là trung điểm AC. Gọi G, H là trọng tâm ΔSAB, ΔSBC.

a) Tìm giao điểm E của MH và (SAB).
b) Tìm giao điểm F của MG và (SBC).
c) Chứng minh rằng: BM // (SEF).

Bài 14. Cho hình chóp S.ABC. Gọi G là trọng tâm tam giác SAC, I là điểm nằm trên cạnh AB sao cho IA = 2IB. Chứng minh rằng: IG // (SBC).

Vấn đề 2: Thiết diện của hình chóp tạo bởi mặt phẳng song song với một đường thẳng hoặc hai đường thẳng chéo nhau.

Bài tập

Bài 1. Cho tứ diện ABCD. M là trung điểm BC; mặt phẳng (α) qua M và song song với AB và CD. Xác định thiết diện của (α) với tứ diện.

Bài 2. Cho tứ diện ABCD. M là điểm nằm trong tam giác BCD; mặt phẳng (α) qua M và song song với AC và BD. Xác định thiết diện của (α) với tứ diện.

Bài 3. Cho tứ diện ABCD; H; K lần lượt là trọng tâm tam giác ABC; ACD; mặt phẳng (α) qua HK và song song với AC. Xác định thiết diện của (α) với tứ diện.

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD với ABCD là hình thang có đáy lớn AD. M, N lần lượt là trung điểm cạnh SC, SD. Mặt phẳng (α) qua M, N và song song với SB. Xác định thiết diện của (α) với hình chóp.

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD. M, N lần lượt là trung điểm cạnh SB, SD. Mặt phẳng (α) quay quanh MN và song song với SC. Xác định thiết diện của (α) với hình chóp.

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD; M là điểm thuộc cạnh AB. Mặt phẳng (α) qua M và song song với SA và BD. Xác định thiết diện của (α) với hình chóp.

Bài 7. Cho hình chóp S.ABCD với ABCD là hình thang. M là điểm thuộc đoạn BD; mặt phẳng (α) qua M và song song với SA và CB. Xác định thiết diện của (α) với hình chóp.

Bài 8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. M là điểm thuộc đoạn AC; mặt phẳng (α) qua M và song song với SC và BD. Xác định thiết diện của (α) với hình chóp.

Bài 9. Cho hình chóp S.ABCD. M là điểm thuộc đoạn SA; mặt phẳng (α) qua M và song song với SC và SD. Xác định thiết diện của (α) với hình chóp.

Bài 10. Cho hình chóp S.ABCD. M là điểm nằm trong tam giác ACD; mặt phẳng (α) qua M và song song với cạnh SC và SD. Xác định thiết diện của (α) với hình chóp.

Bài 11. Cho hình chóp S.ABCD. G là trọng tâm tam giác SBC; mặt phẳng (α) qua G và song song với SA và SD. Xác định thiết diện của (α) với hình chóp.

Bài 12. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N là trung điểm SA, SD.

a) Xác định giao điểm của NC và (OMD).
b) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) quay quanh OM và song song với CD.

Bài 13. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành, I là một điểm trong tam giác ABD, (α) là mặt phẳng qua I và song song với SA và BD. Hãy tìm thiết diện của hình chóp S.ABCD với (α).

Bài 14. Cho tứ diện ABCD. M là trung điểm AD, N thuộc cạnh BC, mặt phẳng (α) qua MN và song song với CD.

a) Hãy tìm thiết diện của tứ diện ABCD với (α).
b) Hãy xác định vị trí của N trên CD sao cho thiết diện là hình bình hành. .

Bài 15. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang đáy lớn AB. Gọi điểm M trên cạnh AD.

a) Tìm giao tuyến 2 mặt phẳng: (SAD) và (SBC); (SAB) và (SCD).
b) Gọi I là trung điểm SB. Tìm giao điểm của AI và (SDC).
c) Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC. Chứng minh: G_1G_2 // (ABCD).
d) Mặt phẳng (α) qua M và song song với SA và BD. Xác định thiết diện của (α) với hình chóp.

Bài 16. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành, M là điểm thuộc cạnh DC, mặt phẳng (α) qua M, song song với BD và SC, lần lượt cắt các cạnh BC, SB, SA, SD tại N, P, Q, R.

a) Chứng minh rằng: MN // BD; SC // MR và SC // NP.

b) Xác định giao điểm I của AC và (α). Chứng minh rằng: IQ // SC.
c) Giả sử RQ cắt MN tại J. Chứng minh rằng: A, D, J thẳng hàng.
d) Khi M, N là trung điểm CD, BC và MN cắt AB tại I; điểm Q di động trên cạnh SA. Tìm tập hợp trọng tâm G của tam giác IJQ.

Bài 17. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O, E là trung điểm SA, M thuộc cạnh BC.

a) Tìm giao điểm của SD và (EBC).
b) Mặt phẳng (α) chứa ME và song song với AB cắt SB, AD lần lượt tại F, N. Tứ giác MNEF là hình gì và chứng minh.
c) MF cắt NE tại I . Chứng minh: I di động trên 1 đường cố định khi M di động trên BC.

Bài 18. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm SA, SB, IJ. G là trọng tâm tam giác SCD.

a) Tìm giao tuyến của (OIJ) với (ABCD) và giao điểm của AC với (SDK).
b) Gọi M là điểm thuộc cạnh BC. Mặt phẳng (α) qua MG và CD cắt AD, SD, SC tại N, P, Q. Xác định các điểm N, P, Q; từ đó suy ra thiết diện của (α) với hình chóp.

Bài 19. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a; ΔSAD vuông cân tại A; M là một điểm trên SC. Mặt phẳng (α) qua M, song song với SA và BC cắt các cạnh SB, AB, CD lần lượt tại N, P, Q.

a) MNPQ là hình gì? Biết ΔSAC vuông ở A. Tính diện tích MNPQ theo $SM = x \ \left(0 < x < a\sqrt{3}\right)$.
b) Chứng minh rằng: SD // (α).
c) Gọi $I = MQ \cap NP$. Tìm tập hợp các điểm I khi M di động trên SC.

Bài 20. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành. Gọi M là một điểm di động trên cạnh SC, (α) là mặt phẳng qua AM và song song BD cắt SB, SD lần lượt tại B′ và D′.

a) Chứng minh (α) luôn luôn chứa 1 đường thẳng cố định khi M di động trên SC.
b) Gọi $I = MB' \cap BC$, $J = MD' \cap CD$. Chứng minh rằng: I, J, A thẳng hàng.

Bài 21. Cho tứ diện ABCD. M trên cạnh BC. Vẽ mặt phẳng (α) cắt các cạnh AC, AD, BD lần lượt tại N, P, Q. Biết (α) // AB.

a) MNPQ là hình gì?
b) Chứng minh MQ, MP, CD đồng quy.

c) Gọi $I = NQ \cap MP$. Tìm tập hợp các điểm I khi M di động trên cạnh BC.

§4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

1. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng phân biệt trong không gian

- (α) cắt (β) theo giao tuyến là một đường thẳng: $(\alpha)\cap(\beta) = a$.
- (α) trùng (β): $(\alpha)\equiv(\beta)$.
- (α) song song (β): $(\alpha)//(\beta)$ khi (α) và (β) không có điểm chung.

2. Hai mặt phẳng song song

Định nghĩa: $(\alpha)//(\beta) \Leftrightarrow (\alpha)\cap(\beta) = \varnothing$

Điều kiện để hai mặt phẳng song song:

Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β).

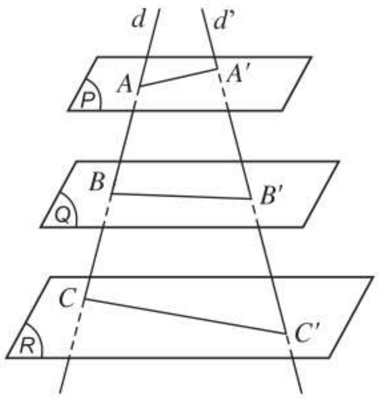
$$\begin{cases} a,b \subset (\alpha) \\ a // (\beta) \\ b // (\beta) \\ a,b \text{ cắt nhau} \end{cases} \Rightarrow (\alpha)//(\beta)$$

Tính chất:

- Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước, có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.
- Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) thì qua a có một và chỉ một mặt phẳng (β) song song với (α).
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.
- Mọi đường thẳng d đi qua A và song song với (α) $\left(A \notin (\alpha)\right)$ đều nằm trong mặt phẳng (β) đi qua A và song song với (α).
- Nếu $(\alpha)//(\beta)$ thì mọi mặt phẳng (γ) đã cắt (α) thì phải cắt (β) và các giao tuyến của chúng song song.
- Nếu $\begin{cases} (\alpha)//(\beta) \\ a \in (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a//(\beta)$.
- Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.

3. Định lý Thalès

Thuận: Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kỳ những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



Ba mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ đôi một song song nhau và hai đường thẳng d và d' cắt ba mặt phẳng lần lượt tại A,B,C (thuộc d) và A',B',C' (thuộc d') thì:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$$

Đảo: Trên hai đường thẳng chéo nhau a và b lần lượt lấy các điểm A,B,C và A',B',C' sao cho $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$. Khi đó ba đường thẳng AA',BB',CC' lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song hay chúng cùng song song với một mặt phẳng.

Vấn đề 1: Chứng minh hai mặt phẳng song song

Cách 1:

$$\begin{cases} a,b\subset(\alpha) \\ a//(\beta) \\ b//(\beta) \\ a,b \text{ cắt nhau} \end{cases} \Rightarrow (\alpha)//(\beta) \qquad \textbf{hay} \qquad \begin{cases} a,b \text{ cắt nhau và } a,b\subset(\alpha) \\ a',b' \text{ cắt nhau và } a',b'\subset(\beta) \\ a//a' \\ b//b' \end{cases} \Rightarrow (\alpha)//(\beta)$$

Cách 2:

$$\begin{cases} (\alpha)//(\beta) \\ a\subset(\alpha) \end{cases} \Rightarrow a//(\beta)$$

Bài tập

Bài 1. Cho tứ diện SABC. Gọi M;N;P lần lượt là trung điểm SA; SB; SC. Chứng minh: (MNP) // (ABC).

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M; N lần lượt là trọng tâm tam giác SBC; SCD. P là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SP=\frac{2}{3}SD$. Chứng minh: (MNP) // (ABCD).

Bài 3. Cho hình chóp S.ABC. Gọi D, E, F lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB; SBC; SCA. Chứng minh rằng: (DEF) // (ABC).

Bài 4. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Lấy điểm M; N lần lượt thuộc các đường chéo AC; BF sao cho MC = 2AM; NF = 2BN. Qua M; N vẽ các đường thẳng song song với AB cắt các cạnh AD; AF lần lượt tại H; K. Chứng minh rằng:

a) (ADF) // (BCE)
b) MN // DE
c) HK // (DEF)
d) (MNKH) // (DEF)

Vấn đề 2: Thiết diện của hình chóp tạo bởi mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β) cho trước

Sử dụng định lý: Nếu hai mặt phẳng song song bị cắt bởi mặt phẳng thứ ba thì hai giao tuyến song song với nhau.

Bài tập

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình thang có đáy lớn AB, M là một điểm thuộc cạnh BC.

a) Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) qua M, song song với (SAB) là hình gì?
b) Gọi E,F lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (P) với SD và SC. Chứng minh rằng: Giao điểm I của NE và MF chạy trên một đường thẳng cố định.

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Trên các cạnh SA, CD, BC ta lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $\frac{SM}{SA}=\frac{CN}{CD}=\frac{CP}{CB}$. Chứng minh rằng: MN // (SBC).

Bài 3. Cho hình bình hành ABCD. Vẽ 4 tia Ax, By, Cz, Dt song song cùng chiều và không nằm trong mặt phẳng (ABCD). Dựng mặt phẳng (α) di động cắt 4 tia này lần lượt tại A′, B′, C′ và D′.

a) Chứng minh (AA′B′B) // (CC′D′D).
b) Chứng minh (AA′D′D) // (BB′C′C).
c) Chứng minh A′B′C′D′ là hình bình hành.
d) Chứng minh AA′ + CC′ = BB′ + DD′.
e) Tâm O′ của hình bình hành A′B′C′D′ luôn nằm trên đường thẳng cố định.

Bài 4. Cho hai hình vuông ABCD và ABEF không đồng phẳng. Trên hai đường chéo AC và BF ta lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho AM = BN. Từ M, N kẻ các đường thẳng song song với AB và cắt AD, AF lần lượt tại M′ và N′.

a) Chứng minh: (ADF) // (BCE).
b) Chứng minh: (DEF) // (MNN'M').
c) Chứng minh: MN // (CDEF).

Bài 5. Cho tứ diện SABC có SA = SB = SC. Kẻ lần lượt các tia phân giác ngoài Sx, Sy, Sz của các góc ASB, BSC, CSA trong ΔSAB, ΔSBC, ΔSCA. Chứng minh rằng: Sx, Sy, Sz đồng phẳng.

Bài 6. Trong mặt phẳng (α) cho 2 tia Ox và Oy cố định. Từ $A \notin (\alpha)$, kẻ tia Az song song cùng chiều với Ox. Trên Ox, Oy, Az lấy M, N, P di động thỏa: OM = ON = AP.

a) Chứng minh: (MNP) // mp(β) cố định.
b) Chứng minh: (IJK) // (α), với I, J, K là trung điểm OA, MP, NP.
c) Chứng minh: K chạy trên một đường thẳng cố định.

Bài 7. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC.

a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi các mặt phẳng qua MN và song song với (SBD).
b) Gọi I, J lần lượt là giao điểm của hai mặt phẳng trên với AC. Chứng minh rằng: AC = 2IJ.

Bài 8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi E là trung điểm của cạnh SB và điểm I thuộc đoạn OD.

a) Chứng minh: SD // (ACE).
b) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α) qua I và song song với mặt phẳng (ACE).

Bài 9. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, AB, SC. Lấy điểm M tùy ý trên cạnh AD.

a) Chứng minh: JK // (SAD).
b) Xác định thiết diện của hình chóp bị cắt bởi (P) qua M và song song với (SAB).

Bài 10. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O có AC = a, BD = b.Tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng (P) lưu động song song với mp(SBD) và qua điểm I trên đoạn AC .

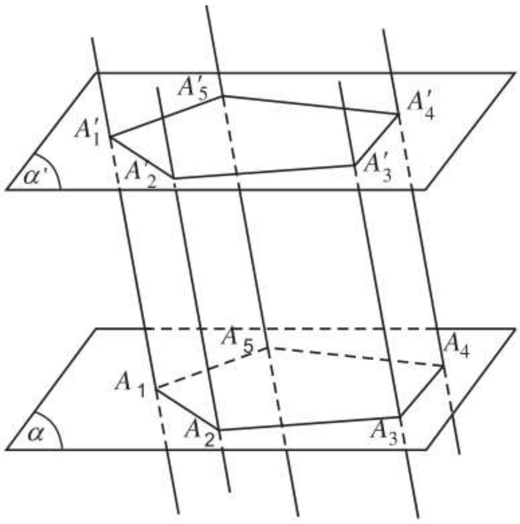
a) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P).
b) Tính diện tích thiết diện theo a, b và x = AI.

Bài 11. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi E là trung điểm SB. Biết tam giác ACE đều và AC = OD = a. Một mặt phẳng (P) di động song song với (AEC) và qua I trên đoạn OD; (P) cắt AD, CD, SC, SB, SA lần lượt M, N, P, Q, R.

a) Có nhận xét gì về tam giác PQR và tứ giác MNPR?
b) Tìm tập hợp giao điểm của MP và MR khi I di động trên đoạn OD.
c) Tìm diện tích đa giác MNPQR theo a và x = DI . Tính x để diện tích ấy lớn nhất.
d)

Vấn đề 3: Hình lăng trụ – Hình hộp

1. Hình lăng trụ



Cho 2 mặt phẳng (P) và (P') song song nhau. Trên (P) cho đa giác $A_1A_2...A_n$. Qua các đỉnh của đa giác này, ta vẽ các đường thẳng song song nhau và lần lượt cắt mặt phẳng (P') tại các điểm tương ứng là $A_1', A_2', ..., A_n'$.

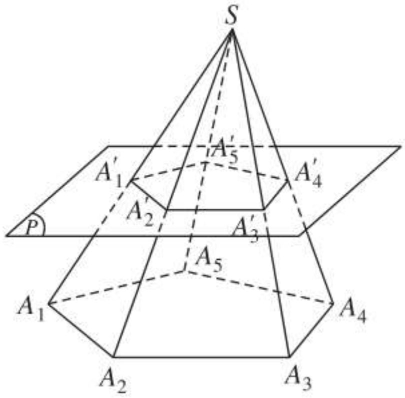
Hình gồm hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $A_1'A_2'...A_n'$ và các hình bình hành $A_1A_1'A_2'A_2$, $A_2A_2'A_3'A_3$, ... , $A_nA_n'A_1'A_1$ được gọi là hình lăng trụ.

Kí hiệu: $A_1A_2...A_n.A_1'A_2'...A_n'$.

Lưu ý:

- Hình lăng trụ có đáy là hình tam giác được gọi là *hình lăng trụ tam giác*.
- Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là *hình hộp*.

2. Hình chóp cụt



Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ và mặt phẳng (P) không qua đỉnh, song song với mặt đáy, cắt các cạnh bên $SA_1, SA_2,..., SA_n$ lần lượt tại $A_1', A_2',..., A_n'$.
Hình tạo bởi thiết diện $A_1'A_2'...A_n'$ và đáy $A_1A_2...A_n$ cùng các tứ giác $A_1'A_2'A_2A_1$, $A_2'A_3'A_3A_2$, ... , $A_n'A_1'A_1A_n$ được gọi là hình chóp cụt .
Kí hiệu: $A_1A_2...A_n.A_1'A_2'...A_n'$.

Bài tập

Bài 1. Cho lăng trụ tam giác ABC.A′B′C′. Gọi I, J, K lần lượt là tâm của các hình bình hành ACC′A′, BCC′B′ và ABB′A′.

a) Chứng minh: IJ // (ABB′A′); JK // (ACC′A′); IK // (BCC′B′).
b) Chứng minh: Ba đường thẳng AJ, CK, BI đồng quy tại điểm O.
c) Chứng minh: (IJK) song song với mặt phẳng đáy của lăng trụ.
d) Gọi G, G′ lần lượt là trọng tâm của Δ ABC và Δ A′B′C′. Chứng minh rằng: G, O, G′ thẳng hàng.

Bài 2. Cho lăng trụ ABC.A′B′C′. Gọi M, M′ lần lượt là trung điểm BC và B′C′.

a) Tìm giao điểm của A′M với (AB′C′).
b) Tìm giao tuyến d của (AB′C′)và (A′BC′).
c) Chứng minh giao điểm G của d với (AMA′) chính là trọng tâm của AB′C′.

Bài 3. Cho hình hộp ABCD.A′B′C′D′. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác A′BD và CB′D′.

a) Chứng minh rằng: (A′BD) // (CB′D′).
b) Chứng minh: G_1, G_2 chia đoạn AC′ thành ba phần bằng nhau.
c) Gọi I, K lần lượt là tâm của các hình bình hành ABCD, BCC′B′. Xác định thiết diện tạo bởi (A′IK) với hình hộp.

Bài 4. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm C'D', A'A , BC.

a) Chứng minh rằng: (MNP) // (ACD').
b) Tìm thiết diện của hình hộp bị cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Bài 5. Cho hình hộp ABCD. $A_1B_1C_1D_1$. Gọi O_1 là tâm của $A_1B_1C_1D_1$ và K, E lần lượt là trung điểm của CD, BO_1.

a) Chứng minh rằng: $E \in (ACB_1)$.
b) Xác định thiết diện của hình hộp bị cắt bởi (P) qua điểm K và song song với (ACE).

Bài 6. Cho hình hộp ABCD. $A_1B_1C_1D_1$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AD, C_1D_1 sao cho $\frac{AM}{MD} = \frac{D_1N}{NC_1}$. Chứng minh: MN // (BDC_1) và xác định thiết diện của hình hộp bị cắt bởi (P) qua MN và song song với (BDC_1).

Bài 7. Cho hình lăng trụ ABC. $A_1B_1C_1$.Trên cạnh AB kéo dài lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AM}$.

a) Xác định thiết diện của hình lăng trụ tạo bởi (P) qua M, B_1 và trung điểm E của AC.
b) Tìm giao điểm D của BC với (MB_1E). Tính tỉ số $\frac{DB}{DC}$.

Bài 8. Cho hình lăng trụ ABC. $A_1B_1C_1$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AA_1, AC, B_1C_1.

a) Xác định thiết diện của hình lăng trụ bị cắt bởi (MNB_1).
b) Xác định thiết diện của hình lăng trụ bị cắt bởi (MNP).

Bài 9. Cho hình lăng trụ ABC. $A_1B_1C_1$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACC_1, $A_1B_1C_1$. Chứng minh rằng: (IJK) $//(BB_1C_1C)$ và $(A_1JK)//(A_1B_1)$.

Bài 10. Cho hình lăng trụ ABC. $A_1B_1C_1$. Gọi H là trung điểm của A_1B_1.

a) Chứng minh rằng: $B_1C // (AHC_1)$.
b) Tìm $d = (AB_1C_1) \cap (A_1BC)$ và chứng minh: $d // (BB_1CC_1)$.
c) Xác định thiết diện của hình lăng trụ bị cắt bởi mặt phẳng (H,d).