Phần I.
ĐẠI SỐ VÀ MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH

Chương I: MỆNH ĐỀ VÀ TẬP HỢP

§1. MỆNH ĐỀ

1. Định nghĩa
Mệnh đề là một câu khẳng định đúng hoặc một câu khẳng định sai (không có mệnh đề vừa đúng vừa sai hoặc không đúng cũng không sai).
Kí hiệu: $A, B, C, ..., P, Q, R, ...$

2. Mệnh đề phủ định
Phủ định của mệnh đề P, kí hiệu $\overline{P}$, đọc là "không P".
Nếu P đúng thì $\overline{P}$ sai, nếu P sai thì $\overline{P}$ đúng.

3. Mệnh đề kéo theo
Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là mệnh đề kéo theo, kí hiệu: $P \Rightarrow Q$.
Mệnh đề này chỉ sai khi P đúng và Q sai (các trường hợp còn lại đều đúng).

4. Mệnh đề đảo
Cho mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$
Chú ý: Nếu $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề đúng thì chưa chắc mệnh đề đảo của nó cũng đúng.

5. Mệnh đề tương đương
Mệnh đề "P khi và chỉ khi Q" được gọi là mệnh đề tương đương, kí hiệu: $P \Leftrightarrow Q$.
Mệnh đề này đúng khi cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng.

6. Mệnh đề chứa biến; ký hiệu $\forall$ (với mọi), $\exists$ (tồn tại)
Mệnh đề $P(x)$ mà tính đúng – sai của nó tùy thuộc vào giá trị cụ thể của x trong một tập hợp X nào đó được gọi là mệnh đề chứa biến.
Nếu $P(x)$ là mệnh đề chứa biến $x \in X$ thì:

- Mệnh đề "Với mọi x thuộc X, $P(x)$" được kí hiệu là: "$\forall x \in X, P(x)$".
- Mệnh đề "Tồn tại x thuộc X, $P(x)$" được kí hiệu là: "$\exists x \in X, P(x)$".

Phủ định của mệnh đề chứa kí hiệu $\forall$ hoặc $\exists$:

- Phủ định của mệnh đề "$\forall x \in X, P(x)$" là mệnh đề "$\exists x \in X, \overline{P(x)}$".
- Phủ định của mệnh đề "$\exists x \in X, P(x)$" là mệnh đề "$\forall x \in X, \overline{P(x)}$".

Bài tập

Bài 1. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là mệnh đề và khẳng định nào là mệnh đề chứa biến?

a) $3+4=7$.
b) $7-2<5$.
c) $2x+1=0$.
d) $2x-3y=0$.
e) Số 7 là số nguyên tố.
f) Lập phương của một số thực luôn là số dương.

Bài 2. Xét tính đúng – sai và phát biểu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

a) Số 6 là số nguyên tố.
b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$.
c) Phương trình $x^2 + 2x + 5 = 0$ có nghiệm.
d) $2^{11} - 1$ chia hết cho 11.
e) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{12}\right)^2$ là số hữu tỉ.
f) $x = 2$ là nghiệm của phương trình $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 0$.

Bài 3. Xét tính đúng – sai của các mệnh đề sau và lập mệnh đề đảo của chúng.

a) Nếu tứ giác $ABCD$ là hình thoi thì hai đường chéo AC và BD vuông góc nhau.

b) Nếu hai tam giác có diện tích bằng nhau thì hai tam giác đó bằng nhau.

Bài 4. Hãy dùng kí hiệu $\forall$, $\exists$ viết lại các mệnh đề sau đây và viết mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề đó.

a) Với mọi số tự nhiên n thì $n^2 - 1$ chia hết cho 3.
b) Tồn tại số tự nhiên n sao cho $2^n - 1$ là số nguyên tố.
c) Có ít nhất một số nguyên dương x thỏa $x^2 = 2$.
d) Với a, b là hai số nguyên dương bất kỳ, $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$.
e) Với mọi nguyên dương x, tồn tại một số nguyên dương y để $x \le y$.
f) Tồn tại một số nguyên dương x, và một số nguyên dương y để có $x \le y$.

Bài 5. Xét tính đúng – sai và lập mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

a) $A: "\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 2 > 0"$.
b) $B: "\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \ge x"$.
c) $L: "\exists n \in \mathbb{N}, \left(n^2 - 1\right) \vdots 3"$.
d) $N: "\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 + 6x + 9 \le 0"$.
e) $P: "\exists n \in \mathbb{R}, \frac{1}{n^2} = 9"$.
f) $N: "\exists x \in \mathbb{Z}, 5x^2 + 5x + 2 = 0"$.

§2. TẬP HỢP

1. Tập hợp

Tập hợp là một khái niệm cơ bản của toán học, không có định nghĩa.

Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là tập rỗng, kí hiệu: $\varnothing$.

Có hai cách xác định tập hợp:

- Liệt kê các phần tử của tập hợp. Ví dụ $A=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.
- Nêu tính chất đặc trưng của các phần tử thuộc tập hợp. Ví dụ $B=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-3x-4=0\}$.

2. Tập hợp con

Cho hai tập hợp A và B. Nếu mọi phần tử của A đều thuộc tập hợp B, ta nói tập hợp A là tập hợp con của B, kí hiệu: $A\subset B$.

$A\subset B\Leftrightarrow(\forall x, x\in A\Rightarrow x\in B)$

Nếu tập hợp C không là tập hợp con của B thì ta viết: $C\not\subset B$.

$C\not\subset B\Leftrightarrow(\exists x, x\in C$ và $x\notin B)$

Quy ước: $\varnothing\subset A$, với mọi A.

Tính chất:

+ $A\subset A$, với mọi A.

+ $A\subset B, B\subset C\Rightarrow A\subset C$.

Chú ý: Nếu tập A có n phần tử thì A có 2^n tập con.

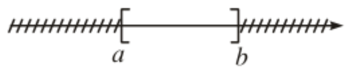
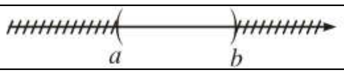
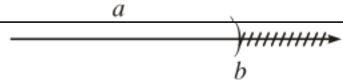
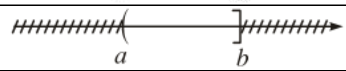
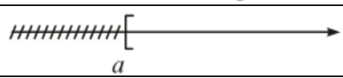
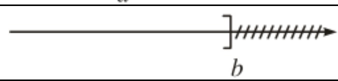
3. Hai tập hợp bằng nhau

Hai tập A và B gọi là bằng nhau khi mọi phần tử của A đều thuộc B và mọi phần tử của B đều thuộc A, kí hiệu: $A=B$.

$$A=B \Leftrightarrow A\subset B \text{ và } B\subset A$$

Hai tập A và B không bằng nhau gọi là khác nhau, kí hiệu: $A\neq B$.

4. Một số tập con của tập hợp số thực $\mathbb{R}$

Tên gọi và tập hợp	Biểu diễn trên trục số
Đoạn $[a;b]$, $[a;b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$	
Khoảng $(a;b)$, $(a;b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$	
Khoảng $(a;+\infty)$, $(a;+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x>a\}$	
Khoảng $(-\infty;b)$, $(-\infty;b)=\{x\in\mathbb{R}\mid x<b\}$	
Nửa khoảng $[a;b)$, $[a;b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x<b\}$	
Nửa khoảng $(a;b]$, $(a;b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\le b\}$	
Nửa khoảng $[a;+\infty)$, $[a;+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x\ge a\}$	
Nửa khoảng $(-\infty;b]$, $(-\infty;b]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le b\}$	

Bài tập

Bài 1. Xác định các tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp.

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 5\}$. b) $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \dfrac{1}{x^2} > \dfrac{1}{36}\right\}$.

Bài 2. Xác định các tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng của các phần tử thuộc tập hợp.

a) $A = \{1;3;5;7\}$. b) $B = \{1;4;9;16\}$.

Bài 3. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập con của tập nào?

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$; $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x-4| < 5\}$;

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 25\}$; $D = (-2;3)$.

Bài 4. Xác định tất cả các tập hợp con của các tập hợp sau:

a) $A = \{a;b\}$. b) $B = \{1;2;3\}$.

c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2-9)(3x^2-4x+1) = 0\}$.

Bài 5. Dùng các kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng để viết các tập hợp sau:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \le 9\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 5\}$.

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 1 < 0\}$.

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x + 4 > 0\}$.

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - x \le 0\}$.

f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid 5x - 2 \le 0\}$.

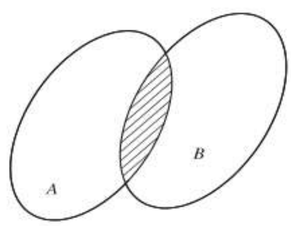
§3. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

1) Giao của hai tập hợp

Tập hợp gồm các phần tử vừa thuộc A, vừa thuộc B được gọi là giao của A và B, k hiệu: $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$$



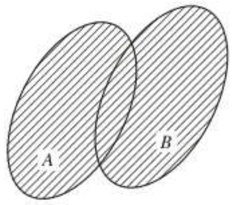
$A \cap B$

2) Hợp của hai tập hợp

Tập hợp gồm các phần tử thuộc A hoặc thuộc B được gọi là hợp của A và B, kí hiệu: $A \cup B$.

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B \}$$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array} \right.$$



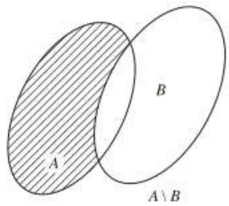
$A \cup B$

3) Hiệu của hai tập hợp

Tập hợp gồm các phần tử thuộc A và không thuộc B được gọi là hiệu của A và B (theo thứ tự này), kí hiệu: $A \setminus B$.

$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ và } x \notin B \}$$

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ x \notin B \end{array} \right.$$



$A \setminus B$

Nếu $B \subset A$ thì $A \setminus B$ được gọi là phần bù của B trong A, kí hiệu: $C_A B$.

Khi đó: $C_A B = A \setminus B$.

Bài tập

Bài 1. Cho tập hợp $A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \le 6 \}$ và $B = \{1;2;3;6;7;8\}$.

Xác định các tập hợp: $A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B,\ B \setminus A$.

Bài 2. Cho tập hợp $A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 4 = 0 \text{ hay } |x| \le 1 \}$ và tập hợp

$$B = \{ x \in \mathbb{Z} \mid (2x^2 - x)(x^2 - 2x - 3) = 0 \}.$$

Xác định các tập hợp: $A \cup B;\ A \cap B;\ A \setminus B;\ B \setminus A;\ (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Bài 3. Xác định $A \cup B;\ A \cap B;\ A \setminus B;\ B \setminus A$ biết:

a) $A = (-1;3)$ và $B = [-3;4]$.

b) $A = \left(-\dfrac{1}{2}; 0 \right)$ và $B = \left[-\dfrac{1}{3}; \dfrac{5}{2} \right)$.

Bài 4. Xác định $C_{\mathbb{R}}(A \cup B),\ C_{\mathbb{R}}(A \cap B), C_{\mathbb{R}} A \cap B, A \setminus C_{\mathbb{R}} B$, biết:

a) $A = (-3;1)$ và $B = [-2;4]$.

b) $A = \left(-\infty; \dfrac{3}{5} \right]$ và $B = \left(\dfrac{4}{7}; \dfrac{7}{4} \right)$.

CHƯƠNG IV: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

§1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ $0°$ ĐẾN $180°$

1. Định nghĩa

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nửa đường tròn tâm O nằm phía trên trục hoành có bán kính $R = 1$ được gọi là nửa đường tròn đơn vị.

Với mỗi góc α $\left(0° \le \alpha \le 180°\right)$ ta xác định một điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ và điểm M có tọa độ $M\left(x_0; y_0\right)$. Khi đó ta định nghĩa:

$\sin\alpha = y_0$

$\cos\alpha = x_0$

$\tan\alpha = \dfrac{y_0}{x_0} \qquad \left(x_0 \ne 0\right)$

$\cot\alpha = \dfrac{x_0}{y_0} \qquad \left(y_0 \ne 0\right)$

Ta gọi các số $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$ là các giá trị lượng giác của góc α.

2. Tính chất

$0 < \alpha < 90°$	$90° < \alpha < 180°$
$\sin\alpha > 0$ $\cos\alpha > 0$ $\tan\alpha > 0$ $\cot\alpha > 0$	$\sin\alpha > 0$ $\cos\alpha < 0$ $\tan\alpha < 0$ $\cot\alpha < 0$

$\sin\left(180° - \alpha\right) = \sin\alpha$ $\cos\left(180° - \alpha\right) = -\cos\alpha$ $\tan\left(180° - \alpha\right) = -\tan\alpha$ $\cot\left(180° - \alpha\right) = -\cot\alpha$	$\sin\left(90° - \alpha\right) = \cos\alpha$ $\cos\left(90° - \alpha\right) = \sin\alpha$ $\tan\left(90° - \alpha\right) = \cot\alpha$ $\cot\left(90° - \alpha\right) = \tan\alpha$

3. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$180°$
$\sin\alpha$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0	$-\dfrac{1}{2}$	-1
$\tan\alpha$	0	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\|$	$-\sqrt{3}$	0
$\cot\alpha$	$\|$	$\sqrt{3}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\|$

Bài tập

Bài 1. Tính giá trị biểu thức

a) $A=\sin 45^\circ+\cos 60^\circ+\sin 45^\circ.\cos 45^\circ-\tan 30^\circ.\cot 60^\circ$

b) $B=\cos 20^\circ+\cos 80^\circ+\cos 100^\circ+\cos 160^\circ$

c) $C=\left(2\sin 30^\circ+\cos 135^\circ-3\tan 150^\circ\right)\left(\cos 180^\circ-\cot 60^\circ\right)$

d) $D=\cos 0^\circ+\cos 10^\circ+\cos 20^\circ+\cos 30^\circ+...+\cos 160^\circ+\cos 170^\circ$

e) $E=\sin^2 90^\circ+\cos^2 120^\circ-\cos^2 0^\circ-\tan^2 60^\circ+\cot^2 135^\circ$

Bài 2. Đơn giản biểu thức

a) $A=\sin 100^\circ+\sin 80^\circ+\cos 16^\circ+\cos 164^\circ$

b) $B=\sin\left(180^\circ-\alpha\right).\cot\alpha-\cos\left(180^\circ-\alpha\right).\tan\alpha.\cot\left(180^\circ-\alpha\right)$ với $0<\alpha<90^\circ$

Bài 3. Rút gọn

a) $A=\left(2\sin 30^\circ+\cos 135^\circ-3\tan 135^\circ\right)\left(\cos 180^\circ+\cot 60^\circ\right)$

b) $B=\sin^2 90^\circ+\cos^2 120^\circ+\cos^2 0^\circ-\tan^2 150^\circ+\cot^2 135^\circ$

c) $C=\sin^2 10^\circ+\sin^2 20^\circ+...+\sin^2 70^\circ+\sin^2 80^\circ$

Bài 4.

a) Cho $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$ với $90^0<\alpha<180^0$. Tính $\cos\alpha$ và $\tan\alpha$

b) Cho $\cos\alpha=-\dfrac{2}{3}$. Tính $\sin\alpha$ và $\cot\alpha$

c) Cho $\tan\gamma=-2\sqrt{2}$. Tính giá trị lượng giác còn lại.

Bài 5.

a) Cho $\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$ với $0^0<\alpha<90^0$. Tính $A=\dfrac{\tan\alpha+3\cot\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha}$.

b) Cho $\tan\alpha=\sqrt{2}$. Tính $B=\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha+2\sin\alpha}$

§2. ĐỊNH LÍ CÔSIN VÀ ĐỊNH LÍ SIN

1. Định lý côsin

Trong ΔABC với $BC=a,\ CA=b,\ AB=c$. Ta có:

$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac.\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab.\cos C$$

Hệ quả:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

2. Định lý sin

Với $AB=c,\ BC=a,\ CA=b$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ta có:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

3. Hệ thức đường trung tuyến

Với $AB=c, BC=a, AC=b$ và m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài các đường trung tuyến kẻ từ A, B, C của ΔABC, ta có:

$$m_a{}^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$$
$$m_b{}^2=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}$$
$$m_c{}^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}$$

4. Công thức diện tích tam giác ABC

$$S=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c$$
$$S=\frac{1}{2}ab.\sin C=\frac{1}{2}ac.\sin B=\frac{1}{2}bc.\sin A$$

$S=\dfrac{abc}{4R}$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC)

$S=p.r$ (r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC)

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ($p=\dfrac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi ΔABC)

Vấn đề 1: Tính cạnh, góc, trung tuyến, phân giác, diện tích. Bán kính đường tròn ngoại tiếp. Bán kính đường tròn nội tiếp theo một số yếu tố cho trước.

Phương pháp:

Sử dụng các định lý hàm sin, cos; hệ thức trung tuyến và các công thức tính diện tích.

AD là phân giác trong góc A.

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ADC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}bc.\sin A = \frac{1}{2}c.AD.\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}b.AD.\sin\frac{A}{2}$$

Từ đó tính được AD.

Bài tập

Bài 1. Cho tam giác ABC có:

a) $b = 8$; $c = 5$; $\widehat{A} = 60°$. Tính S, R, r, h_a, m_a.

b) $a = 2\sqrt{3}$; $b = 2\sqrt{2}$; $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Tính ba góc của tam giác.

c) $a = 5$; $b = 6$; $c = 7$. Tính S, h_a, h_b, h_c, R, r.

d) $\widehat{A} = 60°$; $a = 6$. Tính R.

e) $\widehat{A} = 60°$; $\widehat{B} = 45°$; $b = 4$. Tính a, c.

f) $b = 6$; $c = 7$; $\widehat{C} = 60°$. Tính a.

g) $\widehat{A} = 120°$; $\widehat{B} = 45°$; $R = 2$. Tính ba cạnh của tam giác.

h) $c = 3$; $b = 4$; $S = 3\sqrt{3}$. Tính a.

i) $\widehat{A} = 60°$; $h_c = \sqrt{3}$; $R = 5$. Tính a, b, c.

j) $AB = \sqrt{2} + 1$; $AC = \sqrt{2} - 1$; $BC = \sqrt{6 - \sqrt{2}}$. Tính $\widehat{A}$.

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 4; BC = 5; BD = 7$. Tính AC .

Bài 3. Cho ΔABC có $a = 7, b = 5, c = 3$. Tính góc A và độ dài phân giác trong AD.

Bài 4. Trong tam giác ABC có hai trung tuyến $BM = 6, CN = 9$ và hợp với nhau một góc $120°$. Tính các cạnh của tam giác ABC.

Bài 5. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90°, AB = a, AD = 3a, \widehat{BAD} = 60°$. Tính AC

Vấn đề 2:

Chứng minh các hệ thức về mối quan hệ giữa các yếu tố của một tam giác.

Phương pháp:

Vận dụng các định lý, công thức trong tam giác.

Biến đổi từ vế này sang vế kia hoặc biến đổi tương đương đến một hệ thức đã biết.

Dùng một hệ thức đã biết biến đổi thành hệ thức phải chứng minh.

Vận dụng tỉ số diện tích hai tam giác.

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}} = \frac{AB}{AD}.\frac{AC}{AE}$$

Bài 1. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có:

a) $\sin A = \sin B.\cos C + \sin C.\cos B$

b) $h_a = 2R.\sin B \sin C$

c) $c^2 = (a-b)^2 + 4S.\frac{1-\cos C}{\sin C}$

d) $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$

e) $S = Rr(\sin A + \sin B + \sin C)$

f) $a = b\cos C + c\cos B$

g) $b^2 - c^2 = a(b\cos C - c\cos B)$

h) $(b^2 - c^2)\cos A = a(c\cos C - b\cos B)$

Bài 2. Cho $\vartriangle ABC$ có:

a) $b + c = 2a$. Chứng minh: $\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{2}{h_a}$ và $2\sin A = \sin B + \sin C$

b) $bc = a^2$. Chứng minh: $\sin^2 A = \sin B.\sin C$ và $h_b.h_c = h_a^2$.

Bài 3. Chứng minh rằng:

a) $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại C.

b) $5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

c) $b^2 + c^2 = 5a^2 \Leftrightarrow$ Hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau.

Bài 4. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh:

a) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

b) $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$

c) $4m_a^2 = b^2 + c^2 + 2b.c.\cos A$

Bài 5. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD. Chứng minh:

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2$.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có phân giác trong AD. Chứng minh:

a) $AD = \dfrac{\sqrt{2}bc}{b+c}$

b) $r = \dfrac{1}{2}\left(b + c - \sqrt{b^2 + c^2}\right)$

Bài 7. Xét tính chất tam giác ABC biết:

a) $S = p(p-c)$

b) $a\cos B = b\cos A$

Vấn đề 3: Giải tam giác

Bài toán giải tam giác là bài toán xác định tất cả các cạnh và các góc của tam giác dựa trên một số điều kiện cho trước.

Vận dụng các định lý hàm cos, sin; định lý tổng ba góc trong một tam giác; định lý Pythagore; các hệ thức lượng trong tam giác vuông.

Bài 1. Giải tam giác ABC biết:

a) $a = 6,3; b = 6,3; \widehat{C} = 54°$

b) $a = 7; b = 23; \widehat{C} = 130°$

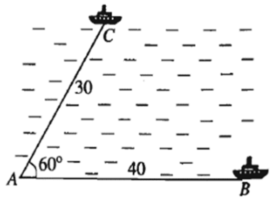
c) $c = 35; \widehat{A} = 40°; \widehat{B} = 120°$

d) $a = 14; b = 18; c = 20$

Bài 2. Giả sử chúng ta cần đo chiều cao CD của một cái tháp với C là chân tháp, D là đỉnh tháp. Vì không thể đến chân tháp nên từ hai điểm A, B với $AB = 30m$ sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng; người ta đo được các góc $\widehat{CAD} = 43°$, $\widehat{CBD} = 67°$. Tính chiều cao CD của cái tháp.

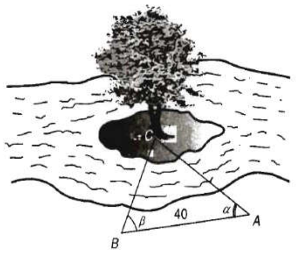
Bài 3. Khoảng cách từ A đến C không thể đo trực tiếp vì phải qua một đầm lầy nên người ta làm như sau: Xác định một điểm B có khoảng cách $AB = 12m$ và đo góc $\widehat{ACB} = 37°$. Tính khoảng cách AC biết $BC = 5m$.

Bài 4. Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60^0. Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí? Kết quả gần nhất với số nào sau đây?

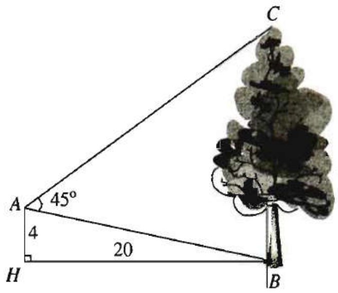


Bài 5. Để đo khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến gốc cây C trên cù lao giữa

sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C. Ta đo được khoảng cách $AB = 40\text{m}$, $\widehat{CAB} = 45^0$ và $\widehat{CBA} = 70^0$.Vậy sau khi đo đạc và tính toán được khoảng cách AC gần nhất với giá trị nào sau đây?



Bài 6. Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (hình vẽ). Biết $AH = 4\text{m}$, $HB = 20\text{m}$, $\widehat{BAC} = 45^0$. Chiều cao của cây gần nhất với giá trị nào sau đây?



Bài 7. Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B và C thẳng hàng. Ta đo được $AB = 24$ m, $\widehat{CAD} = 63^0$, $\widehat{CBD} = 48^0$.