TÀI LIỆU HỌC TẬP TUẦN 1 (6/9/2021 – 11/9/2021)

MÔN TOÁN

LỚP 12:

- **ĐẠI SỐ:**

2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

ĐỊNH LÍ 1

Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu f có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị

ĐỊNH LÍ 2

Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó

a) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a;x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0;b)$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.

b) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a;x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0;b)$ thì

ĐỊNH LÍ 3

Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0, $f'(x_0) = 0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0.

a) Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.

4. Quy tắc tìm cực trị

QUY TẮC 1

1. Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$.

2. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.

3. Lập bảng biến thiên

4. Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị

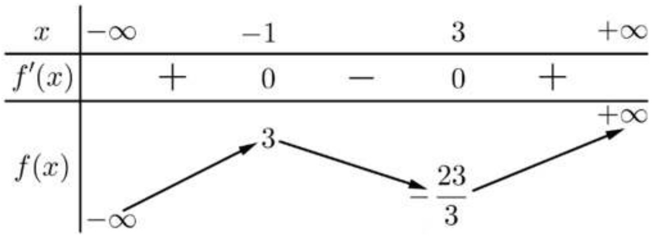
Ví dụ: Áp dụng quy tắc 1 tìm cực trị của hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+\frac{4}{3}.$

Lời giải. Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=x^2-2x-3;$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=3.$

Bảng biến thiên



Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x=-1,$ giá trị cực đại của hàm số là $f(-1)=3;$

hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=3,$ giá trị cực tiểu của hàm số là $f(3)=-\frac{23}{3}.$

QUY TẮC 2

1. Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$.

2. Tìm các nghiệm x_i $(i=1,2,3...)$ của phương trình $f'(x)=0.$

3. Tìm $f''(x)$ và tính $f''(x_i).$

Nếu $f''(x_i)<0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm $x_i.$

Nếu $f''(x_i)>0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x_i.$

Ví dụ: Áp dụng quy tắc 2 tìm cực trị của hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+\frac{4}{3}.$

Lời giải. Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=x^2-2x-3;$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=3;$

$f''(x)=2x-2.$

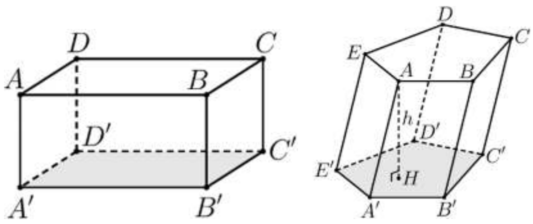
Vì $f''(-1)=-4<0$ nên hàm số đạt cực đại tại điểm $x=-1,$ $f(-1)=3.$

Vì $f''(3)=4>0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=3,$ $f(3)=-\frac{23}{3}.$

➢ **HÌNH HỌC:**

I - THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

Nếu ta xem khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ như là khối lăng trụ có đáy là hình chữ nhật $A'B'C'D'$ và đường cao AA' thì suy ra thể tích của nó bằng diện tích đáy nhân với chiều cao. Ta có thể chứng minh được rằng điều đó cũng đúng với một khối lăng trụ bất kì



Định lí

Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là

$$V = Bh.$$

II - THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

Đối với khối chóp người ta chứng minh được định lí sau:

Định lí

Thể tích khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là

$$V = \frac{1}{3}Bh.$$

Ta cũng gọi thể tích các khối đa diện, khối lăng trụ, khối chóp đã nói ở trên lần lượt là thể tích các hình đa diện, hình lăng trụ, hình chóp xác định chúng.

Bài tập

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a.$ Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}.$ Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $a^3\sqrt{2}.$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}.$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a,\ BC = 2a.$ Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy $(ABCD),$ cạnh $SA = a\sqrt{15}.$ Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $2a^3\sqrt{15}.$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}.$ **C.** $\frac{2a^3\sqrt{15}}{3}.$ **D.** $\frac{2a^3\sqrt{15}}{6}.$

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a.$ Cạnh bên SA vuông góc với đáy mặt phẳng đáy và $SC = a\sqrt{5}.$ Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $a^3\sqrt{3}.$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}.$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 3a,\ BC = a.$ Cạnh bên SD vuông góc với mặt phẳng đáy và $SD = 2a.$ Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $a^3.$ **B.** $2a^3.$ **C.** $3a^3.$ **D.** $6a^3.$

Câu 5. Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt đáy, $SA=4,\ AB=6,\ BC=10$ và $CA=8$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. 24. **B.** 32. **C.** 40. **D.** 192.

Câu 6. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại $B,\ AB=a,\ AC=2a.$ Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a.$ Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $\frac{2a^3}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

LỚP 11

➢ **ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH**

§2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1. Phương trình $\sin x = m$ (1) **(**m **là hằng số)**

- $|m|>1$ thì (1) vô nghiệm vì $|\sin x|\le 1$ với mọi x.
- $|m|\le 1$ thì nếu α là một giá trị đúng sao cho $m=\sin\alpha$.

Khi đó, $(1)\Leftrightarrow \sin x=\sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+k2\pi \\ x=\pi-a+k2\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$

Nếu không tìm được giá trị đúng α thì:

$\sin x=m\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\arcsin m+k2\pi \\ x=\pi-\arcsin m+k2\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$ $\left(\arcsin m\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)$

Tổng quát: $\sin u=\sin v\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v+k2\pi \\ u=\pi-v+k2\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$

(với u,v là các biểu thức chứa x)

Một số trường hợp đặc biệt:

- $\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$
- $\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$
- $\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

2. Phương trình $\cos x=m$ (2) **(**m **là hằng số)**

- $|m|>1$ thì (2) vô nghiệm vì $|\cos x|\le 1$ với mọi x.
- $|m|\le 1$ thì nếu α là một giá trị đúng sao cho $m=\cos\alpha$.

Khi đó, $(2)\Leftrightarrow \cos x=\cos\alpha\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+k2\pi \\ x=-a+k2\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$

Nếu không tìm được giá trị đúng α thì:

$\cos x=m\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\arccos m+k2\pi \\ x=-\arccos m+k2\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$ $\left(\arccos m\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)$

Tổng quát: $\cos u=\cos v\Leftrightarrow u=\pm v+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ (với u,v là các biểu thức chứa x)

Một số trường hợp đặc biệt:

- $\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$
- $\cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

3. Phương trình $\tan x = m \qquad (3)$ **(**m **là hằng số)**

Phương trình luôn có nghiệm $\forall m$.
Nếu α là một giá trị đúng sao cho $m = \tan\alpha$.

Khi đó, $(3) \Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \qquad \left(\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Nếu không tìm được giá trị đúng α thì:

$\tan x = m \Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \qquad \left(\arctan m \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Tổng quát: $\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$ (với u, v là các biểu thức chứa x)

Một số trường hợp đặc biệt:

- $\tan x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$
- $\tan x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

4. Phương trình $\cot x = m \qquad (4)$ **(**m **là hằng số)**

Phương trình luôn có nghiệm $\forall m$.
Nếu α là một giá trị đúng sao cho $m = \cot\alpha$.

Khi đó, $(4) \Leftrightarrow \cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \qquad \left(\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Nếu không tìm được giá trị đúng α thì:
$\cot x = m \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} m + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \qquad (\operatorname{arccot} m \in (0;\pi))$

Tổng quát: $\cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$ (với u, v là các biểu thức chứa x)

Một số trường hợp đặc biệt:

- $\cot x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$
- $\cot x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

➢ HÌNH HỌC

Chương 2. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

1. Các tính chất thừa nhận của hình học không gian

- Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.
- Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.
- Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.
- Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.
- Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

2. Các cách xác định mặt phẳng

- Ba điểm A, B, C không thẳng hàng xác định mặt phẳng duy nhất.
  Kí hiệu: (ABC), (ACB), …
- Đường thẳng d và một điểm A nằm ngoài d xác định mặt phẳng duy nhất.

Kí hiệu: (A,d) hay (d,A).

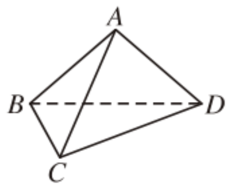
- Hai đường thẳng a,b cắt nhau xác định mặt phẳng duy nhất.
  Kí hiệu: (a,b).
- Hai đường thẳng a,b song song với nhau xác định mặt phẳng duy nhất.
  Kí hiệu: (a,b).

3. Hình chóp

a

Hình chóp gồm một đỉnh và đáy là một đa giác.
Kí hiệu: $S.ABC$, $S.ABCD$ …

4. Tứ diện



Tứ diện là hình gồm bốn đỉnh không đồng phẳng tạo ra bốn mặt là bốn tam giác.
Tứ diện đều có bốn mặt là tam giác đều (tất cả các cạnh đều bằng nhau).

Vấn đề 1: Giao tuyến của hai mặt phẳng
Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt, ta cần tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng. Khi đó, đường thẳng qua hai điểm chung đó là giao tuyến của hai mặt phẳng.

$$\begin{cases} A \in (\alpha)\ ;\ A \in (\beta) \\ B \in (\alpha)\ ; B \in (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = AB$$

LỚP 10

➢ **ĐẠI SỐ**

Chương II: HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

§1. HÀM SỐ

Vấn đề 1: Tập xác định của hàm số
Hàm số thường được cho bởi công thức $y = f(x)$ trong đó $f(x)$ là một biểu thức chứa x và các hằng số cùng với những kí hiệu phép toán.
Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.
$\sqrt{A}$ xác định khi $A \geq 0$.
$\dfrac{1}{A}$ xác định khi $A \neq 0$.
Tập xác định D của một hàm số là giao các tập điều kiện.

Vấn đề 2: Sự biến thiên của hàm số
Xét K là một khoảng, nửa khoảng hay một đoạn của $\mathbb{R}$.
1. Định nghĩa
Cho hàm số f xác định trên K.
- f đồng biến trên K $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- f nghịch biến trên K $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

2. Hệ quả

Cho hàm số f xác định trên K.

- f đồng biến trên K $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 \neq x_2 \Rightarrow \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$.

- f nghịch biến trên K $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 \neq x_2 \Rightarrow \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$.

Ghi chú:
Xét chiều biến thiên của hàm số là tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến thuộc tập xác định của hàm số.

Vấn đề 3: Tính chẵn, lẻ của hàm số

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ $(\forall x \in D)$.

- f là hàm số chẵn $\Leftrightarrow$ với mọi $x \in D$, ta có $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.
- f là hàm số lẻ $\Leftrightarrow$ với mọi $x \in D$, ta có $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

2. Nhận xét

- Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.
- Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

➢ **HÌNH HỌC**

§2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ (TIẾP THEO)

1. Tổng hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Từ điểm A bất kỳ vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

Khi đó vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Kí hiệu: $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Tính chất:

- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

Quy tắc ba điểm: Với ba điểm A, B, C bất kỳ: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Quy tắc hình bình hành:

$ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Hệ thức trung điểm: M là trung điểm $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Hệ thức trọng tâm: G là trọng tâm $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Lưu ý:

- $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng $\Rightarrow \left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$
- $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng $\Rightarrow \left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\left|\vec{a}\right| - \left|\vec{b}\right|\right|$
- $\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc $\Rightarrow \left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2$
- $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \leq \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|, \forall a, b$

2. Hiệu hai vectơ

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$: $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ đối nhau.

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$ $\qquad$ ($-\vec{b}$ là vectơ đối của $\vec{b}$)

Quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$.