TÀI LIỆU HỌC TẬP TUẦN 10 (8/11/2021 –13/11/2021)

MÔN TOÁN

LỚP 12

- *ĐẠI SỐ*

ÔN CHƯƠNG 1

- *HÌNH HỌC*

I - ĐỊNH NGHĨA

1. Mặt cầu

Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R không đổi gọi là mặt cầu có tâm là O và bán kính bằng R.

Kí hiệu: $S(O;R)=\{M\,|OM=R\}$.

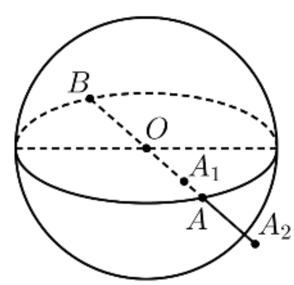
2. Khối cầu

Mặt cầu $S(O;R)$ cùng với các điểm nằm bên trong nó được gọi là một khối cầu tâm O, bán kính R.

Kí hiệu: $B(O;R)=\{M\,|OM\le R\}$.

Nếu OA, OB là hai bán kính của mặt cầu sao cho A, O, B thẳng hàng thì đoạn thẳng AB gọi là đường kính của mặt cầu.

Định lí. Cho hai điểm cố định A, B. Tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $\widehat{AMB}=90^0$ là mặt cầu đường kính AB.



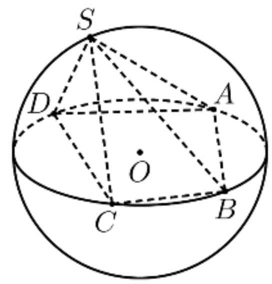
- $A\in S(O;R)\Leftrightarrow OA=R$.
- $OA_1<R\Leftrightarrow A_1$ nằm trong mặt cầu.
- $OA_2>R\Leftrightarrow A_2$ nằm ngoài mặt cầu.

II - MẶT CẦU NGOẠI TIẾP KHỐI ĐA DIỆN

Định nghĩa: Mặt cầu đi qua mọi đỉnh của một hình đa diện (H) gọi là mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện (H) và khi đó (H) được gọi là nội tiếp mặt cầu đó.

Điều kiện cần và đủ để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là đáy của nó là một đa giác nội tiếp một đường tròn.

Mọi tứ diện đều có mặt cầu ngoại tiếp.



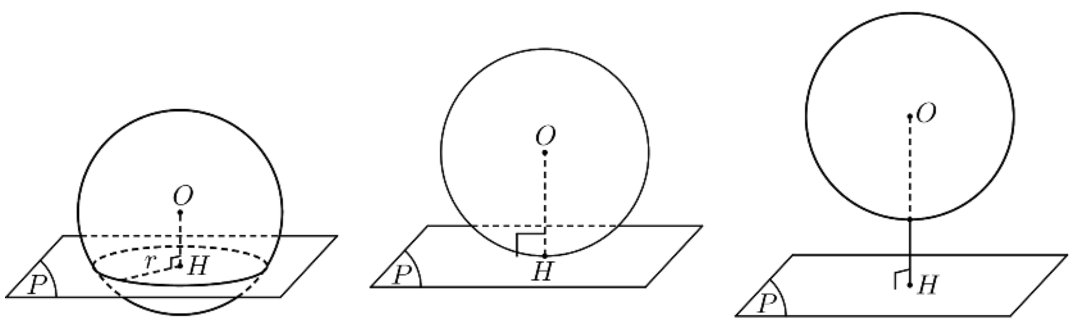
III - MẶT CẦU NỘI TIẾP HÌNH CHÓP

1. Mặt cầu nội tiếp hình chóp là mặt cầu nằm bên trong hình chóp và tiếp xúc với với tất các mặt của hình chóp.

2. Tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp cách đều tất cả các mặt của hình chóp.

IV - VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẲNG

Cho mặt cầu $S(O;R)$ và mặt phẳng (P), gọi d là khoảng cách từ O đến (P) và H là hình chiếu vuông góc của O trên (P). Khi đó



- Nếu $d < R$ thì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $S(O;R)$ theo giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng (P) có tâm là H và có bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

Khi $d = 0$ thì mặt phẳng (P) đi qua tâm O của mặt cầu, mặt phẳng đó gọi là mặt phẳng kính; giao tuyến của mặt phẳng kính với mặt cầu là đường tròn có tâm O và bán kính R, đường tròn đó gọi là đường tròn lớn của mặt cầu.

- Nếu $d = R$ thì mặt phẳng (P) và mặt cầu $S(O;R)$ có điểm chung duy nhất H.

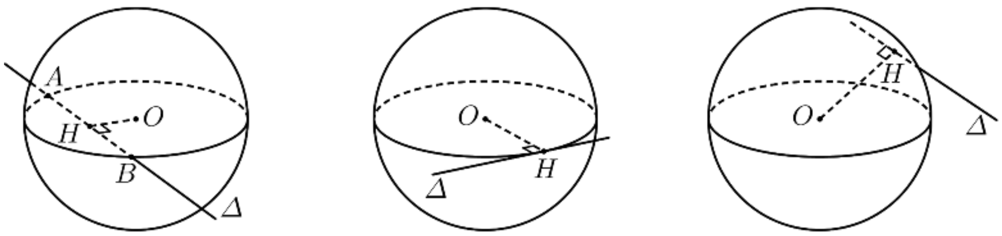
Khi đó ta nói (P) tiếp xúc với $S(O;R)$ tại H và (P) gọi là tiếp diện của mặt cầu, H gọi là tiếp điểm.

Chú ý. Cho H là một điểm thuộc mặt cầu $S(O;R)$ và mặt phẳng (P) qua H. Thế thì (P) tiếp xúc với $S(O;R) \Leftrightarrow OH \perp (P)$.

- Nếu $d > R$ thì mặt phẳng (P) và mặt cầu $S(O;R)$ không có điểm chung.

V - VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ ĐƯỜNG THẲNG

Cho mặt cầu $S(O;R)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên Δ và $d = OH$ là khoảng cách từ O đến Δ. Khi đó



- Nếu $d < R$ thì Δ cắt $S(O;R)$ tại hai điểm A, B và H là trung điểm của AB.

- Nếu $d = R$ thì Δ và $S(O;R)$ chỉ có một điểm chung H, trường hợp này Δ gọi là tiếp tuyến của mặt cầu $S(O;R)$ hay Δ tiếp xúc với $S(O;R)$ và H là tiếp điểm.

- Nếu $d > R$ thì Δ và $S(O;R)$ không có điểm chung.

VI - DIỆN TÍCH MẶT CẦU VÀ THỂ TÍCH KHỐI CẦU

Mặt cầu bán kính R có diện tích là

$$\boxed{S = 4\pi R^2}$$

Khối cầu bán kính R có thể tích là

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

LỚP 11

- *ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH*

§3. NHỊ THỨC NEWTON

1. Công thức nhị thức Newton

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

Trong đó: $a, b \in \mathbb{R}$; $n, k \in \mathbb{N}$.

Nhận xét:

- Số các số hạng của khai triển là $n+1$.
- Tổng các số mũ của a và b trong mỗi số hạng bằng số mũ của nhị thức: n.
- Số hạng thứ $k+1$ được gọi là số hạng tổng quát trong khai triển: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$.
- Nếu n chẵn thì số hạng đứng giữa của khai triển là $T_{\frac{n}{2}+1}$.

Nếu n lẻ thì số hạng đứng giữa của khai triển là $T_{\frac{n+1}{2}}$ và $T_{\frac{n+1}{2}+1}$.

2. Một số khai triển mở rộng

Vì $C_n^{n-k} = C_n^k$ ta có thể viết khai triển Newton theo cách khác:

$$(a+b)^n = C_n^n a^n + C_n^{n-1}a^{n-1}b^1 + C_n^{n-2}a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-k}a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^0 b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^{n-k}a^{n-k}b^k$$

Đối với phép trừ: ta xem $a-b = a+(-b)$. Khi đó ta có khai triển:

$$(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1}b^1 + C_n^2 a^{n-2}b^2 - \ldots + (-1)^k C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + (-1)^n C_n^n b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a^{n-k}b^k$$

Một số khai triển thường gặp:

Khi $a=b=1$	$(1+1)^n = 2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n$
Khi $a=1;\ b=-1$	$(1-1)^n = 0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots + (-1)^n C_n^n$
Khi $a=x;\ b=1$	$(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^k x^{n-k} + \ldots + C_n^n$
Khi $a=x;\ b=-1$	$(x-1)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^k C_n^k x^{n-k} + \ldots + (-1)^n C_n^n$

➢ *HÌNH HỌC*

§3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG (TT)

1. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α):

$a \subset (\alpha)$: a và (α) có hai điểm chung phân biệt.

a cắt (α): a và (α) có một điểm chung duy nhất $M = d \cap (\alpha)$.

$a // (\alpha)$: a và (α) không có điểm chung.

2. Đường thẳng song song với mặt phẳng

Định nghĩa: $a // (\alpha) \Leftrightarrow a \cap (\alpha) = \varnothing$

Tính chất:

- Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b nào đó nằm trong mặt phẳng (α) không chứa a thì a song song với (α).

$$\begin{cases} a // b \\ b \subset (\alpha) \\ a \not\subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a // (\alpha)$$

- Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a.

$$\begin{cases} a//(\alpha) \\ a \subset (\beta) \\ (\alpha)\cap(\beta) = b \end{cases} \Rightarrow a//b$$

- Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau và cùng song song với đường thẳng a thì giao tuyến của (α) và (β) cũng song song với a.

$$\begin{cases} a//(\alpha) \\ a//(\beta) \\ (\alpha)\cap(\beta) = b \end{cases} \Rightarrow a//b$$

- Nếu hai đường thẳng a và b chéo nhau thì có duy nhất một mặt phẳng chứa a và song song với b.

Vấn đề 1: Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Để chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (α), ta chứng minh a không nằm trong (α) và a song song với một đường thẳng b nằm trong (α).

$$\begin{cases} a//b \\ b \subset (\alpha) \Rightarrow a//(\alpha) \\ a \not\subset (\alpha) \end{cases}$$

Vấn đề 2: Thiết diện của hình chóp tạo bởi mặt phẳng song song với một đường thẳng hoặc hai đường thẳng chéo nhau.

TOÁN 10

- *ĐẠI SỐ*

§4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

Vấn đề: Giải và biện luận hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad \left(\text{ví i} \begin{cases} a^2 + b^2 \neq 0 \\ a'^2 + b'^2 \neq 0 \end{cases} \right)$$

Phương pháp:

Tính $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$; $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$; $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$.

Trong đó $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, được gọi là định thức cấp hai.

Khi đó:

Nếu $D \neq 0$: hệ có nghiệm duy nhất $(x;y): \begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases}$.

Nếu $D = 0$ và $D_x \neq 0$ (hoặc $D_y \neq 0$): hệ vô nghiệm.

Nếu $D = D_x = D_y = 0$: hệ có vô số nghiệm. Tập nghiệm của hệ là tập nghiệm của phương trình $ax + by = c$.

Ghi chú:

Để giải hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn, ta khử bớt ẩn để quy về việc giải hệ phương trình có ít ẩn hơn.

§5. MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HAI ẨN

Dạng 1:

Hệ phương trình gồm một phương trình bậc nhất chứa hai ẩn x, y và một phương trình bậc hai chứa hai ẩn x, y.

Phương pháp giải:

Dùng phương pháp thế:

Tính x theo y (hoặc y theo x) từ phương trình bậc nhất.

Thế vào phương trình thứ hai được phương trình bậc hai một ẩn.

Dạng 2:

Hệ phương trình đối xứng loại 1: là hệ phương trình chứa $x + y; xy$. Hệ phương trình không thay đổi khi thay x bằng y và y bằng x.

Phương pháp giải:

Đặt ẩn phụ $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$ (Điều kiện có nghiệm: $S^2 - 4P \geq 0$).

Đưa về hệ phương trình mới với hai ẩn S, P.

Giải tìm S, P.

Khi đó: x, y là nghiệm phương trình: $X^2 - SX + P = 0$.

Lưu ý:

Nghiệm hệ phương trình đối xứng có tính chất: Nếu $(a;b)$ là nghiệm thì $(b;a)$ cũng là nghiệm.

- *HÌNH HỌC*

§2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ (TT)

Vấn đề 2: Dùng tích vô hướng để tính góc; tính độ dài

$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}$

$\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|^2$

Vấn đề 3: Chứng minh một đẳng thức

Sử dụng công thức, tính chất của tích vô hướng để biến đổi vế này ra đến vế kia. Cũng có thể sử dụng phép biến đổi tương đương. Ta thường sử dụng công thức $\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|^2$ nhờ đó có thể dùng quy tắc biến đổi vectơ (quy ước ba điểm và các hệ thức vectơ thường gặp).

Vấn đề 4: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$$

Vấn đề 5: Tìm tập hợp điểm thỏa một đẳng thức về tích vô hướng hoặc đẳng thức về độ dài.

Dạng 1: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=k$ $\quad(1)$ $\qquad$ (A,B cố định)

- $k=0$: Tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB.
- $k\neq 0$: Gọi I là trung điểm AB.

$(1)\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)=k$

$\Leftrightarrow IM^2-IA^2=k\Leftrightarrow IM^2=\dfrac{AB^2}{4}+k$

Nếu $\dfrac{AB^2}{4}+k>0\Leftrightarrow k>-\dfrac{AB^2}{4}$.

Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $\sqrt{\dfrac{AB^2}{4}+k}$.

Nếu $\dfrac{AB^2}{4}+k=0\Leftrightarrow IM=0$: Tập hợp các điểm M là $\{I\}$.

Nếu $\dfrac{AB^2}{4}+k<0$: Tập hợp các điểm M là $\varnothing$.

Dạng 2: $\overrightarrow{AM}.\vec{v}=k$ $\quad(2)$ $\qquad$ (A cố định, $\vec{v}$ có hướng, độ dài xác định)

- $k=0$: Tập hợp các điểm M là đường thẳng qua A và vuông góc với giá của $\vec{v}$.

- $k \neq 0: (2) \Leftrightarrow \overrightarrow{A'M'}.\vec{v} = k$ với $\overrightarrow{A'M'}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{AM}$ trên giá của vectơ $\vec{v} \Rightarrow M'$ cố định. Tập hợp các điểm M là đường thẳng vuông góc với giá của vectơ $\vec{v}$ tại M'.

Dạng 3: $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k \quad (3) \quad (A, B$ cố định, α, β hằng số, $\alpha + \beta \neq 0)$

Gọi I thỏa $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow I$ cố định.

$(3) \Leftrightarrow \alpha\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \beta\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = k$

$\Leftrightarrow (\alpha + \beta) MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB}\right) + \alpha IA^2 + \beta IB^2 = k$

$\Leftrightarrow (\alpha + \beta) MI^2 = k - \alpha.IA^2 - \beta IB^2$

Nếu $\dfrac{k - \alpha IA^2 - \beta IB^2}{\alpha + \beta} > 0$: Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $\sqrt{\dfrac{k - \alpha IA^2 - \beta IB^2}{\alpha + \beta}}$.

Nếu $\dfrac{k - \alpha IA^2 - \beta IB^2}{\alpha + \beta} = 0$: Tập hợp các điểm M là $\{I\}$

Nếu $\dfrac{k - \alpha IA^2 - \beta IB^2}{\alpha + \beta} < 0$: Tập hợp các điểm M là $\varnothing$.