

§5. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

1. Định nghĩa

Tam thức bậc hai đối với x là biểu thức có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những hệ số, $a \neq 0$.

2. Dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Với $\Delta = b^2 - 4ac$ ($\Delta' = b'^2 - ac$).

Nghiệm của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) là nghiệm (nếu có) của phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$.

- $\Delta > 0$: $f(x)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$).

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	Cùng dấu với a	0	Trái dấu với a	0	Cùng dấu với a

- $\Delta = 0$: $f(x)$ có nghiệm kép $x_0 = -\frac{b}{2a}$ thì $f(x)$ cùng dấu với a , $\forall x \neq -\frac{b}{2a}$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	Cùng dấu với a	0	Cùng dấu với a

- $\Delta < 0$: $f(x)$ vô nghiệm thì $f(x)$ luôn cùng dấu với a , $\forall x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Cùng dấu với a	

3. Hệ quả

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có $\Delta = b^2 - 4ac$. Khi đó:

- $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
- $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
- $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$
- $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

Lưu ý:

Trong trường hợp tổng quát, ta cần xét riêng từng trường hợp $a = 0$ và $a \neq 0$.

4. Bất phương trình bậc hai một ẩn

Bất phương trình bậc hai ẩn x là bất phương trình dạng:

$$ax^2 + bx + c > 0, ax^2 + bx + c < 0, ax^2 + bx + c \geq 0, ax^2 + bx + c \leq 0 \quad (a \neq 0)$$

Vấn đề 1: Xét dấu các tam thức bậc hai

Bài tập

Xét dấu các tam thức bậc hai sau:

- a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$ b) $f(x) = -2x^2 - 5x - 2$ c) $f(x) = x^2 + 2x + 1$
d) $f(x) = 3x^2 + 10x + 3$ e) $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$ f) $f(x) = -x^2 + 4x - 4$
g) $f(x) = 3x^2 + 6x + 3$ h) $f(x) = -x^2 - x - 2$ i) $f(x) = -x^2 + 3x - 4$

Vấn đề 2: Xét dấu biểu thức dạng tích – thương các nhị thức bậc nhất và tam thức bậc hai

Phương pháp 1: Lập bảng xét dấu chung

- Biến đổi biểu thức về dạng tích; thương các nhị thức, tam thức.
- Tìm tất cả các nghiệm của nhị thức bậc 1, tam thức bậc 2. Giả sử $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.
- Biểu diễn các nghiệm lên dòng trên bảng xét dấu: nhỏ trước, lớn sau.
- Xác định dấu từng nhị thức, tam thức.
- Xác định dấu của biểu thức (qui tắc về tích; thương các dấu).

Phương pháp 2: Phương pháp đan dấu

- Biến đổi biểu thức về dạng tích; thương các nhị thức, tam thức.
- Tìm tất cả các nghiệm của nhị thức bậc 1, tam thức bậc 2. Giả sử $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.
- Biểu diễn các nghiệm lên dòng trên bảng xét dấu: nhỏ trước, lớn sau.
- Xác định dấu của khoảng sau cùng: cùng dấu với tích tất cả các hệ số của x có số mũ cao nhất.
- Xác định dấu từ phải sang trái: qua nghiệm đơn đổi dấu
qua nghiệm kép không đổi dấu.

Ghi chú:

- Nghiệm đơn: số nghiệm giống nhau là số lẻ (1 nghiệm, 3 nghiệm, 5 nghiệm...)
- Nghiệm kép: số nghiệm giống nhau là số chẵn (2 nghiệm, 4 nghiệm, 6 nghiệm...)

Bài tập

Xét dấu các biểu thức sau:

- | | |
|--|--|
| 1) $f(x) = (-x + 1)(-2x - 6)$ | 2) $f(x) = (1 - x)(-2x^2 + 5x - 2)$ |
| 3) $f(x) = (x^2 - 5x + 4)(-x^2 + 2x - 3)$ | 4) $f(x) = x - 1 \quad x^2 - 4x + 3$ |
| 5) $f(x) = \frac{3x - 6}{3x^2 - 10x + 3}$ | 6) $f(x) = \frac{(-x + 4)(x + 9)}{-2x^2 + 5x - 2}$ |
| 7) $f(x) = \frac{(-2x + 4)(x^2 - 4)}{(3x^2 + 6x + 3)}$ | 8) $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{-x + 2}$ |
| 9) $f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 + 2x}{-x + 2}$ | 10) $f(x) = \frac{2 - 2x^4}{x^4 - 10x^2 + 9}$ |
| 11) $f(x) = \frac{x^4 - 4x^2}{3x^2 - 10x + 3}$ | 12) $f(x) = \frac{2x + 4}{1 - x} - \frac{1 - 2x}{x + 1}$ |

$$13) f(x) = \frac{1-x}{3x^2+10x+3} + \frac{1}{3x}$$

$$14) f(x) = \frac{1}{x^3-1} - \frac{x}{x^2+x+1}$$

$$15) f(x) = \frac{x}{x^2+4x+3} - \frac{1}{x+2}$$

$$16) f(x) = \frac{1}{x^2+2x-3} - \frac{1}{-x^2+2x-3}$$

$$17) f(x) = \frac{1}{x^2+2x-3} - \frac{1}{-x^2+2x-3}$$

$$18) f(x) = \frac{-2}{x^3+8} - \frac{1}{x^2-2x+4} + \frac{1}{x+2}$$

Vấn đề 3: Giải bất phương trình

- Biến đổi bất phương trình sao cho: vế phải bằng 0; vế trái là tích – thương các nhị thức, tam thức.
- Xét dấu biểu thức ở vế trái.
- Dựa vào bảng xét dấu và kết hợp với yêu cầu bài toán để chọn nghiệm.

Bài tập

Bài 1. Giải các bất phương trình sau

$$1) 3x^2 + 10x + 3 \geq 0$$

$$2) -x^2 - x + 2 \leq 0$$

$$3) 3x^2 - 10x \leq 3$$

$$4) -x^2 + 4x \geq 4$$

$$5) 3x^2 + 6x + 3 \leq 0$$

$$6) (-2x+4)(3x+9) > 0$$

$$7) 3x - 1^2 \leq x + 1^2$$

$$8) (1-x)(-2x^2+5x-2) \leq 0$$

$$9) (x^2-5x+4)(-x^2+2x-3) > 0$$

$$10) x-1 \quad x^2-4x+3 \geq 0$$

$$11) \frac{3x-6}{3x^2-10x+3} \geq 0$$

$$12) \frac{(-x+4)(x+9)}{-2x^2+5x-2} < 0$$

$$13) \frac{x^2-9x+14}{x^2-5x+4} > 0$$

$$14) \frac{x^4-x^2}{x^2+5x+6} \leq 0$$

$$15) \frac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10} \leq -1$$

$$16) \frac{1-x \quad x^2-4x+3}{x^2-8x+15} \leq 0$$

$$17) \frac{(2-x)(-2x^2+5x-2)}{x^4-x^2} \geq 0$$

$$18) \frac{1-x}{3x^2+10x+3} \leq \frac{1}{3x}$$

$$19) \frac{2x+4}{1-x} > \frac{1-2x}{x+1}$$

$$20) \frac{1}{x^3-1} \geq \frac{x}{x^2+x+1}$$

$$21) \frac{1}{x^2-5x+4} < \frac{1}{x^2-7x+10}$$

$$22) 1 \leq \frac{3}{x^2-8x+15}$$

$$23) \frac{2x^2-5x+2}{-x+2} < 0$$

$$24) \frac{x}{x^2+4x+3} \leq \frac{1}{x+2}$$

$$25) \frac{1}{x^2+2x-3} \leq \frac{1}{-x^2+2x-3}$$

$$26) \frac{1}{x^2-x-6} \leq \frac{1}{x-3}$$

$$27) \frac{-2}{x^3 + 8} \leq \frac{1}{x^2 - 2x + 4} - \frac{1}{x + 2}$$

$$28) \frac{2}{2x^2 - 5x + 2} \geq \frac{1}{x^2 - x + 6}$$

$$29) \frac{1}{x + 2} \leq \frac{2}{x^2 - 2x + 4}$$

$$30) \frac{2x^3 - 5x^2 + 2x}{-x + 2} \geq 0$$

$$31) \frac{x^4 - 4x^2}{3x^2 - 10x + 3} \leq 0$$

$$32) \frac{2 - 2x^4}{x^4 - 10x^2 + 9} > 0$$

Bài 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

$$a) y = \sqrt{\frac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 + 2x + 1}} \quad b) y = \sqrt{\frac{1 - x \quad x^2 - 4x + 3}{x^2 - 8x + 15}} \quad c) y = \sqrt{\frac{3 - 3x}{-x^2 - 2x + 15}} - 1$$

Bài 3. Giải các hệ bất phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 < 0 \end{cases} & 2) \begin{cases} 4x^2 - 5x - 6 \leq 0 \\ -4x^2 + 12x - 5 < 0 \end{cases} & 3) \begin{cases} -2x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ -x^2 - 3x + 10 \geq 0 \end{cases} \\ 4) \begin{cases} 2x^2 - 9x + 7 > 0 \\ x^2 - x - 6 < 0 \end{cases} & 5) \begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ x - 1 \quad 3x^2 + 7x + 4 \geq 0 \end{cases} & 6) \begin{cases} x^2 - 5x - 4 \leq 0 \\ -4x^2 + 12x - 8 \leq 0 \end{cases} \\ 7) \begin{cases} x + 1 > 0 \\ 2x^2 + x - 10 < 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \end{cases} & 8) \begin{cases} \frac{2x + 4}{1 - x} > \frac{1 - 2x}{x + 1} \\ \frac{-2x^2 + 7x + 7}{x^2 - 3x - 10} \leq -1 \end{cases} & 9) \begin{cases} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 + x - 6} \geq 0 \\ \frac{x + 5}{2x + 1} - \frac{2x - 1}{x + 5} > 2 \end{cases} \end{array}$$

Vấn đề 4: Biện luận phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ 1

Trường hợp 1: $a = 0$

Xét $a = 0$, tìm m . Thế vào 1 đưa phương trình về phương trình bậc nhất

$bx + c = 0$.

Trường hợp 2: $a \neq 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

(hay $\Delta' = b'^2 - ac$ với

$$b' = \frac{b}{2})$$

Kết luận

$\Delta > 0$ (hoặc $\Delta' > 0$)	1 có hai nghiệm phân biệt
$\Delta = 0$ (hoặc $\Delta' = 0$)	1 có nghiệm kép
$\Delta < 0$ (hoặc $\Delta' < 0$)	1 vô nghiệm

Bài tập

Bài 1. Tìm m để các phương trình sau có nghiệm:

- a) $m - 5x^2 - 4mx + m - 2 = 0$ b) $m + 1x^2 + 2m - 1x + 2m - 3 = 0$
c) $m^2 - 1x^2 - 2m - 1x + 2 = 0$ d) $m^2 - 1x^2 - 2m + 1x - 2 = 0$

Bài 2. Tìm m để các phương trình sau vô nghiệm:

- a) $m + 1x^2 + 2m - 1x + 2m - 3 = 0$ b) $m^2 - 4x^2 - 2m + 2x - 2 = 0$
c) $m^2 + 1x^2 + 2m + 2x + 6 = 0$ d) $m^2 - 9x^2 - 2m - 3x + 1 = 0$

Bài 3. Chứng minh các phương trình sau vô nghiệm với mọi m :

- a) $x^2 - 2m + 1x + 2m^2 + m + 3 = 0$ b) $m^2 + 1x^2 + 2m + 2x + 8 = 0$

Vấn đề 5: Bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$ 1 có nghiệm $\forall x \in \mathbb{R}$.

Trường hợp 1: $a = 0$

Xét $a = 0$, tìm m . Thế vào 1 đưa phương trình về bất phương trình bậc nhất:

$$1 \Leftrightarrow bx + c > 0$$

Với $b = 0$	$1 \Leftrightarrow 0x + c > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (đúng): nhận m vừa tìm được.
	$1 \Leftrightarrow 0x + c > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (sai): loại m vừa tìm được.
Với $b \neq 0$	$1 \Leftrightarrow bx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (luôn luôn sai): loại m vừa tìm được.

Trường hợp 2: $a \neq 0$

- $ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
- $ax^2 + bx + c < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
- $ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$
- $ax^2 + bx + c \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

Kết luận: Hợp nghiệm của trường hợp 1 và trường hợp 2.

Bài tập

Bài 1. Tìm m để mỗi biểu thức sau đây luôn luôn dương:

a) $m^2 + 2x^2 - 2m + 1x + 1$ b) $m + 2x^2 + 2m + 2x + m + 3$

Bài 2. Tìm m để mỗi biểu thức sau đây luôn luôn âm:

a) $-x^2 + 2m\sqrt{2}x - 2m^2 - 1$ b) $m - 2x^2 - 2m - 3x + m - 1$

Bài 3. Tìm m để mỗi bất phương trình sau đây có nghiệm $\forall x \in \mathbb{R}$:

a) $m - 1x^2 - 4x + 3m - 2 \geq 0$ b) $2x^2 + m - 2x - m + 4 > 0$
 c) $m^2 - 1x^2 - 2m + 1x - 2 \leq 0$ d) $m^2 - 4x^2 + 2m - 2x + 1 \geq 0$
 e) $m^2 - 9x^2 - 2m + 3x + 1 < 0$ f) $m^2 - 3m + 2x^2 + 2m - 1x - 6 > 0$

Bài 4. Tìm m để mỗi hàm số sau đây có tập xác định $D = \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}$:

a) $y = \sqrt{m - 1x^2 - 2m + 1x + 3m - 2}$ b) $y = \sqrt{m + 1x^2 - 2m + 1x + 2}$
 c) $y = \sqrt{m^2 - 1x^2 - 2m + 1x + 2}$ d) $y = \sqrt{m^2 - 4x^2 + 2m + 2x - 2}$
 e) $y = \sqrt{m^2 - 3m + 2x^2 + 2m - 1x - 1}$ f) $y = \sqrt{2m^2 - 3m - 2x^2 + 2m - 2x + 3}$
 g) $y = \frac{2x}{\sqrt{m^2 - 1x^2 - 2m + 1x + 2}}$ h) $y = \frac{2}{\sqrt{m^2 - 9x^2 - 2m + 3x + 2}}$

Vấn đề 6: Bất phương trình bậc hai vô nghiệm

- $ax^2 + bx + c > 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow ax^2 + bx + c \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- $ax^2 + bx + c \geq 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow ax^2 + bx + c < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- $ax^2 + bx + c < 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- $ax^2 + bx + c \leq 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài tập

Bài 1: Định m để các bất phương trình sau vô nghiệm:

a) $(m - 2)x^2 + (m + 1)x \leq 0$ b) $(m^2 - 1)x^2 - 2(m + 1)x + 3 \leq 0$
 c) $(m^2 - 4)x^2 + 2(m - 2)x - 1 \geq 0$ d) $(m^2 - 3m + 2)x^2 - 2(m - 1)x - 6 > 0$
 e) $(m^2 - 9)x^2 - 2(m + 3)x + 1 < 0$ f) $(m - 1)x^2 - 4x + 3m - 2 \geq 0$
 g) $(m^2 - 1)x^2 - 2(m + 1)x + 2 < 0$ h) $2x^2 + (m - 2)x - m + 4 > 0$

Vấn đề 7: Bất phương trình bậc hai có nghiệm

- Giải bài toán bất phương trình bậc hai vô nghiệm.
- Tìm được tham số m thuộc tập S .
- Bất phương trình có nghiệm khi m thuộc tập $\mathbb{R} \setminus S$ (phần bù của S trong $\mathbb{R}$).

Bài tập

Bài 1: Định m để các bất phương trình sau có nghiệm:

a) $(m-1)x^2 - 4x + 3m - 2 \geq 0$

b) $(m^2 - 1)x^2 - 2(m+1)x + 2 \leq 0$

c) $2x^2 + (m-2)x - m + 4 > 0$

d) $(m^2 - 9)x^2 - 2(m+3)x + 1 < 0$

e) $(m^2 - 4)x^2 + 2(m-2)x - 1 \geq 0$

f) $(m^2 - 1)x^2 - 2(m+1)x + 2 < 0$

g) $(m-2)x^2 + (m+1)x \leq 0$

h) $(m^2 - 3m + 2)x^2 + 2(m-1)x - 6 > 0$